ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.17 1986

УДК 514.75

МНОГООБРАЗИЯ m-МЕРНЫХ ПАРАБОЛОИДОВ

Е.А.Митрофанова

Пусть A_n – n-мерное вещественное аффинное пространство и $GA(n)$-аффинная группа, действующая в нем. $R=\{A,\bar e_i\}$ ($i,j=\overline{1,n}$)- его репер, $H(A_n)$ – n^2+n -мерное многообразие реперов. На $H(A_n)$ определен канонический базис линейных дифференциальных форм ω^i, ω^i_k со структурными уравнениями: $d\omega^k=\omega^i\wedge\omega^k_i$, $d\omega^k_i=\omega^j_i\wedge\omega^k_j$.

Рассмотрим вполне интегрируемую систему форм

$$\omega^u,\omega^\alpha,\omega^u_\alpha,\omega^\beta_v,\omega^u_{\alpha\beta}\overset{def}{=}da^u_{\alpha\beta}-a^u_{\gamma\beta}\omega^\gamma_\alpha-a^u_{\alpha\gamma}\omega^\gamma_\beta+a^v_{\alpha\beta}\omega^u_v, \qquad (1)$$

где $\alpha,\beta=\overline{1,m}$; $u,v=\overline{m+1,n}$,

определяющую пространство S^2_m представления группы $GA(n)$. В системе форм (1) выделяются вполне интегрируемые подсистемы: а) $\omega^k(\omega^\alpha,\omega^u)$, б) $(\omega^k,\omega^u_\alpha)$, в) $(\omega^k,\omega^\alpha_u)$, г) $(\omega^k,\omega^\alpha_u,\omega^v_\beta)$, которым отвечают следующие пространства представления группы $GA(n)$: а) $A_n\ni A$; б) S^1_m-пространство m-плоскостей $\sigma^1_m=(A,\bar e_\alpha)$ с отмеченными точками; в) S^1_{n-m}-пространство $(n-m)$-плоскостей $\sigma^1_{n-m}=(A,\bar e_u)$ с отмеченными точками; г) $S^1_m\oplus^t S^1_{n-m}$ – пространство пар $(\sigma^1_m,\sigma^1_{n-m})$ трансверсальных m-плоскостей и $(n-m)$-плоскостей с общей отмеченной точкой A. Дадим интерпретацию тензора $a^u_{\alpha\beta}$, отнесенного к реперу $\tilde R=\{A,\bar e_\alpha,\bar e_u\}$. Обозначим через $A_{n-m}(S^1_{n-m})$-векторное расслоение с базой S^1_{n-m}, слой которого над точкой $\sigma^1_{n-m}\in S^1$ состоит из векторов, принадлежащих плоскости $(A,\bar e_u)$, соответствующей σ^1_{n-m}. $A_{n-m}(S^1_{n-m})$ также является пространством представления группы $GA(n)$ со структурными формами ω^α, ω^u, ω^α_u, $\Delta\mathcal{F}^u=d\mathcal{F}^u+\mathcal{F}^v\omega^u_v$. Формулы $\mathcal{F}^u=a^u_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta-2x^u$, где (x^α,x^u)-координаты

произвольной фиксированной точки $X\in A_n$ относительно репера $\tilde R$, являются формулами охвата отображения $\mathcal{F}: S^2_m\times A_n\to A_{n-m}(S^1_{n-m})$. Ядром отображения $\mathcal{F}$ является подрасслоение расслоения $S^2_m\times A_n\to S^2_m$, слой которого над элементом $\sigma^2_m\in S^2_m$ состоит из точек $X(x^\alpha,x^u)\in A_n$ слоя $(\sigma^2_m,A_n)\subset S^2_m\in A_n$, удовлетворяющих системе алгебраических уравнений:

$$\mathcal{F}^u=a^u_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta-2x^u=0. \qquad (2)$$

Таким образом, пространство S^2_m интерпретируется как многообразие фигур σ^2_m, задаваемых в репере $\tilde R$ системой (2). Фигуру σ^2_m будем называть отмеченным m-параболоидом и обозначать Q_m. В состав m-параболоида Q_m входит отмеченная точка A -начало репера $\tilde R$, касательная к нему в точке A m-плоскость $\sigma^1_m=(A,\bar e_\alpha)$, и $(n-m)$-плоскость $\sigma^1_{n-m}=(A,\bar e_u)$, которую назовем диаметром m-параболоида.

Определение. Q_m-конгруэнцией параболоидов назовем m-мерное подмногообразие $M_m\subset S^2_m$, на котором формы ω^α независимы, а остальные формы (1) выражаются через базисные ω^α следующим образом:

$$\omega^u=0,\quad \omega^u_\alpha=c^u_{\alpha\beta}\omega^\beta,\quad \omega^\alpha_u=c^\alpha_{u\beta}\omega^\beta,\quad \omega^u_{\alpha\beta}=c^u_{\alpha\beta,\gamma}\omega^\gamma, \qquad (3)$$

где

$$c_{\alpha\beta}=c_{\beta\alpha};\qquad c_{\alpha\beta,\gamma}=c_{\beta\alpha,\gamma}.$$

Эти уравнения назовем структурными уравнениями многообразия Q_m. Q_m -многообразие является специальным m-многообразием, на котором формы ω^α независимы. Специальный характер Q_m -многообразия состоит лишь в том, что подмногообразие m-плоскостей $M^1_m\subset S^1_m$ совпадает с касательным расслоением $T\tilde M_m$ m- подмногообразия $\tilde M_m$ в A_n. Это следует из того, что уравнения $\omega^u_\alpha=c^u_{\alpha\beta}\omega^\beta$, $c^u_{\alpha\beta}=c^u_{\beta\alpha}$ являются продолжением уравнений $\omega^u=0$ многообразия $\tilde M_m$. Таким образом, Q_m -многообразие M_m состоит из m-параболоидов, касающихся m-многообразия $\tilde M_m$ в отмеченных точках $A\in\tilde M_m$.

О п р е д е л е н и е. Фокусом [1] m-параболоида Q_m многообразия M_m называется точка $X(x^\alpha, x^u) \in Q_m$, в которой пересекаются все инфинитезимально близкие параболоиды многообразия M_m.

Система алгебраических уравнений для нахождения фокусов имеет вид: $\mathfrak{F}^u = a^u_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta - 2x^u = 0$, (а)

$$\mathfrak{F}^u_\gamma = [c^u_{\alpha\beta,\gamma} x^\beta - 2a^u_{\alpha\beta} c^\beta_{v\gamma} x^v - 2(a^u_{\alpha\gamma} - c^u_{\alpha\gamma})] x^\alpha = 0. \quad (б) \qquad (4)$$

Отсюда следует

П р е д л о ж е н и е. Многообразие $\widetilde{M}_m$ является фокальным для Q_m-многообразия, т.е. образовано фокусами параболоидов, принадлежащих $\widetilde{M}_m$.

Действительно, для каждого параболоида $Q_m \subset \widetilde{M}_m$ его отмеченная точка $A \in \widetilde{M}_m$, являясь началом соответствующего семейства реперов $\widetilde{R} = \{A, \bar{e}_\alpha, \bar{e}_u\}$, имеет всегда нулевые относительные координаты $x^\alpha = x^u = 0$, которые удовлетворяют системе (4).

О п р е д е л е н и е. Точка $X(x^\alpha, x^u)$ называется характеристической [1] для параболоида $Q_m \in M_m$, если x^α, x^u удовлетворяют системе алгебраических уравнений (4,б).

Если характеристическая точка $X \in Q_m$, то она является и фокальной. Первый фундаментальный объект Q_m-многообразия M_m $\Gamma_1 = \{a^u_{\alpha\beta}, c^u_{\alpha\beta}, c^\beta_{u\alpha}, c^u_{\alpha\beta,\gamma}\}$ является основным [2]. Отметим, что каждая из групп компонент $(c^u_{\alpha\beta})$, $(c^\beta_{u\alpha})$, $(c^u_{\alpha\beta\gamma})$ образует самостоятельный тензор смешанного типа, первый из которых $(c^u_{\alpha\beta})$ является основным тензором фокальной m-поверхности $\widetilde{M}_m$, оснащенной трансверсальным расслоением ${}^t M_m \subset S^1_{n-m}$ с фундаментальным объектом $c^\beta_{u\alpha}$; $c^u_{\alpha\beta\gamma}$ является первым продолжением тензора $a^u_{\alpha\beta}$.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвузовский темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1977. Вып. 7. С. 39-42.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 17 1986

УДК 514.75

О НЕГОЛОНОМНЫХ КОМПОЗИЦИЯХ А.П.НОРДЕНА ОСНАЩАЮЩИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Ю.И. П о п о в

Данная статья является продолжением работ [2]-[6] автора, в которых рассматривается построение общей теории регулярных $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределений. В различных дифференциальных окрестностях найдены пучки неголономных композиций А.П.Нордена (НКН) [1], ассоциированные с оснащающим M-распределением и оснащающим H-распределением [2] данного $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения. Во всей работе мы придерживаемся обозначений работ [2]-[6] и следующей схемы использования индексов: $\alpha,\beta.\gamma = m+1, n-1$; $\sigma,\tau,\rho = 1, n-1$; $i,j,k,s = r+1; m$; $a,b,c = 1,m$; $u,v,w = r+1, n-1$; $p,q,t = 1,r$; $I,J,K = 1,n$.

1. Неголономные композиции А.П.Нордена в оснащающем H-распределении

а) Базисное Λ-распределение и распределение $H\Lambda$-виртуальных нормалей $\chi(L_0)$ [2; §4] первого рода Λ-распределения определяют НКН (χ,Λ) [1], структурный объект (аффинор) $\{f^\tau_\sigma\}$ которой в репере $\mathcal{R}_1(H,\chi)$ [2] можно задать формулами

$$f^\tau_\sigma \overset{def}{=} \delta^\tau_\sigma - 2H^\tau_p \overset{*}{H}{}^p_\sigma = -\delta^\tau_\sigma + 2H^\tau_u \overset{*}{H}{}^u_\sigma, \qquad (1)$$

где

$$\|H^\tau_\sigma\| = \begin{Vmatrix} \delta^p_q & \Lambda^v_q \\ 0 & \delta^v_u \end{Vmatrix}; \quad \|\overset{*}{H}{}^\tau_\sigma\| = \begin{Vmatrix} \delta^s_p & -\Lambda^w_p \\ 0 & \delta^w_v \end{Vmatrix}. \qquad (2)$$

Формулы охвата компонент аффинора $\{f^\tau_\sigma\}$ в репере $\mathcal{R}_1(H,\chi)$ принимают вид:

$$f^q_p = -\delta^q_p; \quad f^u_p = -2\Lambda^u_p; \quad f^q_u = 0; \quad f^v_u = \delta^v_u. \qquad (3)$$

Инвариантная НКН оснащающего H-распределения, заданная полем аффинора $\{f^\sigma_\tau\}$ (3), внутренним образом при-