УДК 514.75

ПАРЫ T′ КОНГРУЭНЦИЙ С ДАННЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ КОНГРУЭНЦИИ ОБЩИХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРОВ

О.С.Р е д о з у б о в а
(Московский государственный педагогический институт)

Рассмотрена пара T конгруэнций в E_3, у которой общий перпендикуляр соответствующих прямых пары перпендикулярен общему перпендикуляру пары дополнительных конгруэнций. Такие пары обозначены буквой T′. Изучены свойства таких пар конгруэнций.

С парой T′ конгруэнций связан подвижный ортонормированный репер $(O, \vec{e}_i)$ $(i=1,2,3)$, вершина O которого принадлежит прямой конгруэнции $\{z\}$ общих перпендикуляров пары соответствующих прямых z_a $(a=1,2)$, $\vec{e}_3$ параллелен z. Прямые z_a образуют с вектором $\vec{e}_1$ углы α_a. Прямые z пересекают соответствующие прямые конгруэнций $\{z_a\}$ в точках K_a. Направляющие векторы прямых z_a есть орты $\vec{\eta}_a$. Абсциссы точек K_a относительно репера $(O,\vec{e}_3)$ на прямой z обозначены h_a. Фокусы прямых z_a обозначены F_a и F'_a, абсциссы фокусов относительно репера $(K_a,\vec{\eta}_a)$ обозначены соответственно ρ_a, ρ'_a. Известно [1, с.3], что пары T конгруэнций определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} H_2\rho_1 + \Omega_{23}\dfrac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2} - A_2\rho_2 + Q_2 = 0, \quad A_1\rho_1 - \Omega_{13}\dfrac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2} - H_1\rho_2 - Q_1 = 0, \\ H_2\rho'_1 + \Omega_{23}\dfrac{\rho'_1\rho'_2}{h_1-h_2} - A_2\rho'_2 + Q_2 = 0, \quad A_1\rho'_1 - \Omega_{13}\dfrac{\rho'_1\rho'_2}{h_1-h_2} - H_1\rho'_2 - Q_1 = 0. \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Здесь использованы обозначения $\Omega_a = \omega^1\cos\alpha_a + \omega^2\sin\alpha_a$, $\Omega^*_a = \omega^1\sin\alpha_a - \omega^2\cos\alpha_a$, $\Omega_{a3} = \omega^3_1\cos\alpha_a + \omega^3_2\sin\alpha_a$, $\Omega^*_{a3} = -\omega^3_1\sin\alpha_a + \omega^3_2\cos\alpha_a$, $A_a = \dfrac{\omega^2_1 + d\alpha_a}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}$, $H_a = \dfrac{\omega^3 + dh_a}{h_1-h_2}$, $Q_a = \dfrac{\Omega^*_a + h_a\Omega^*_{a3}}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)}$.

Для того, чтобы задать пару T′ конгруэнций, надо к системе уравнений (I) присоединить условие перпендикулярности общих перпендикуляров соответствующих прямых пары T конгруэнций и пары T дополнительных конгруэнций $\{F_1F_2\}$ и $\{F'_1F'_2\}$. Таким образом, к системе (I) надо присоединить условие $\rho'_1\rho_2 = \rho_1\rho'_2$, которое можно записать в виде: $\rho_2 = t\rho_1$, $\rho'_2 = t\rho'_1$, $t \neq 0$. Рассматриваемые пары T′ конгруэнций определяются следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} Q_1 = \Omega_{13}\dfrac{t\rho_1\rho'_1}{h_1-h_2}, \qquad Q_2 = \Omega_{23}\dfrac{t\rho_1\rho'_1}{h_1-h_2}, \\ A_1 = \Omega_{13}\dfrac{(\rho_1+\rho'_1)t}{h_1-h_2} + H_1 t, \qquad A_2 = \Omega_{23}\dfrac{\rho_1+\rho'_1}{h_1-h_2} + H_2\dfrac{1}{t}, \\ \rho_2 = t\rho_1, \qquad \rho'_2 = t\rho'_1, \quad t \neq 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Исследование такой системы приводит к выводу о том, что рассматриваемые пары T′ конгруэнций существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Т е о р е м а I. Для того, чтобы пары T конгруэнций были парами T′, необходимо, чтобы пары были симметричными и расстояние между граничными точками конгруэнции общих перпендикуляров было равно отношению расстояния между соответствующими прямыми к синусу угла между ними.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поместим вершину O подвижного репера $R_0 = (O, \vec{e}_i)$ $(i=1,2,3)$ в центр прямой конгруэнции общих перпендикуляров, а векторы $\vec{e}_a$ $(a=1,2)$ параллельно биссекторным плоскостям фокальных плоскостей этой конгруэнции. Тогда в соответствии с [2, с.73] выполняются равенства:

$$\omega^1 = -\hat{\rho}\,\mathrm{ctg}\,\varphi\cdot\omega^3_2, \qquad \omega^2 = -\hat{\rho}\,\mathrm{tg}\,\varphi\cdot\omega^3_1. \qquad (3)$$

Здесь $2\hat{\rho}$ и 2φ – соответственно фокальное расстояние и угол между фокальными плоскостями конгруэнции общих перпендикуляров. Подставляя в первые два уравнения системы (2) выражения (3), получим, учитывая линейную независимость форм ω^3_a, равенства:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_2 \equiv \alpha, \qquad h_1 = h_2 \equiv h, \\ \dfrac{2\hat{\rho}}{\sin 2\varphi} = \dfrac{2h}{\sin 2\alpha}, \qquad \rho_1\rho'_1 t = d^2\sin(\varphi+\alpha)\sin(\varphi-\alpha). \end{cases} \qquad (4)$$

Здесь $\dfrac{2\hat{\rho}}{\sin 2\varphi}$ равно расстоянию между граничными точками конгруэнции общих перпендикуляров. Из первых трех равенств следует доказательство теоремы.

Заметим, что при $t=1$ пара T′ конгруэнций является равнонаклонной парой I-го типа [1, с.13]. Произвол существования таких пар – четыре функции одного аргумента.

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы пара T′ конгруэнций была парой I-го типа, необходимо и достаточно, чтобы были равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых пары.

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы пара T′ конгруэнций была парой I-го типа, необходимо и достаточно, чтобы прямые конгруэнции общих перпендикуляров пар дополнительных конгруэнций пересекали в центрах соответствующие прямые этой дополнительной пары.

Т е о р е м а 4. Для того, чтобы у пары T′ конгруэнций соответствующие прямые были пересечены в центрах прямыми конгруэнции общих перпендикуляров, необходимо и достаточно, чтобы пара T дополнительных конгруэнций $\{F_1F_2\}$ и $\{F'_1F'_2\}$ была парой 1-го типа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учтем, что пару T конгруэнций образуют не только конгруэнции $\{z_a\}$ ($a=1,2$),но также и дополнительные конгруэнции $\{F_1F_2\}$ и $\{F_1'F_2'\}$. Эти пары равноправны.В силу теоремы 3 условием того,чтобы пара T' конгруэнций была парой I-го типа,является условие пересечения в центрах соответствующих прямых дополнительных конгруэнций прямыми конгруэнции их общих перпендикуляров.В силу равноправности рассматриваемых двух пар T конгруэнций имеет место предложение:прямые конгруэнции общих перпендикуляров соответствующих прямых пары T конгруэнций пересекают эти прямые в центрах тогда и только тогда,когда пара дополнительных конгруэнций есть пара I-го типа.

Заметим,что рассматриваемые пары определяются системой уравнений:

$$\rho_1'=\rho_1, \quad \rho_2'=-\rho_2, \quad Q_a=-\Omega_{a3}\frac{\rho_1\rho_2}{k_1-k_2}, \quad A_1=H_1\frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad A_2=H_2\frac{\rho_1}{\rho_2}. \tag{5}$$

Исследование системы уравнений (5) приводит к выводу о том,что такие пары конгруэнций существуют с произволом четырех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 5. Для того,чтобы прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекали соответствующие прямые пары T' конгруэнций в центрах,и таким же свойством обладали прямые конгруэнции общих перпендикуляров пары T дополнительных конгруэнций,необходимо и достаточно,чтобы были равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых пары T' и соответствующих прямых пары T дополнительных конгруэнций.

Произвол существования таких пар - три функции одного аргумента.

Т е о р е м а 6. Для того,чтобы пара T' конгруэнций имела постоянное расстояние и постоянный угол между соответствующими прямыми,необходимо и достаточно,чтобы конгруэнция общих перпендикуляров была псевдосферической и чтобы произведение абсцисс несоответствующих фокусов было постоянным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пара T' конгруэнций с постоянным расстоянием и постоянным углом между соответствующими прямыми определяется системой уравнений (2) , к которой присоединены уравнения:

$$A_1=A_2\equiv A, \quad H_1=H_2\equiv H. \tag{6}$$

После некоторых преобразований получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A_1=A_2\equiv A, \quad H_1=H_2\equiv H, \quad A=\alpha\Omega_{13}+\beta\Omega_{23}, \\ H=-\beta\Omega_{13}-\alpha\Omega_{23}, \quad Q_a=\lambda\Omega_{a3} \quad (a=1,2), \end{cases} \tag{7}$$

здесь $\lambda=\frac{t\rho_1\rho_1'}{k_1-k_2}, \quad \alpha=\frac{(\rho_1+\rho_1')t}{k_1-k_2}, \quad \beta=-t\alpha.$

После дифференцирования внешним образом системы уравнений (7) и подстановки туда выражений A , H и Q_a($a=1,2$),имеем систему четырех квадратичных уравнений,два из которых имеют вид: $[d\lambda,\Omega_{13}]=0,[d\lambda,\Omega_{23}]=0$. Отсюда в силу линейной независимости форм Ω_{a3} имеем $d\lambda=0$ и,следовательно, $\lambda=const$. После отнесения конфигурации к семейству подвижных реперов R_0 имеем,в частности,систему уравнений (4).Последнее уравнение этой системы можно преобразовать с помощью остальных,приведя его к виду:

$$\rho_1\rho_1' t=\left(\frac{2h}{\sin 2\alpha}\right)^2(\sin^2\varphi-\sin^2\alpha). \tag{8}$$

Так как левая часть равенства (8) постоянна,то постоянна и правая, откуда следует,что постоянен угол 2φ между фокальными плоскостями конгруэнции общих перпендикуляров.Из третьего уравнения системы (4) следует,что постоянно и фокальное расстояние $2\hat{\rho}$ этой конгруэнции.Отсюда следует,что конгруэнция $\{z\}$ -псевдосферическая.Так как $\lambda=\frac{1}{k_1-k_2}\cdot t\rho_1\rho_1'=const$,то постоянно $\rho_1\rho_2'=\rho_1'\rho_2$. Обратно,пусть у пары T' конгруэнция $\{z\}$ -псевдосферическая и постоянно произведение $\rho_1\rho_2'=\rho_1'\rho_2$. Система уравнений (2) определяет пары T' конгруэнций.Из первых двух уравнений следуют уравнения (4),последнее из которых имеет вид (8).Так как $\rho_1\rho_1't=\rho_1\rho_2'$,то правая часть (8) тоже постоянна.Из третьего уравнения системы (4) имеем постоянство отношения $2h:\sin 2\alpha$. Следовательно,из (8) следует постоянство 2α -угла между соответствующими прямыми.Из постоянства $2h:\sin 2\alpha$ и угла 2α вытекает постоянство расстояния между соответствующими прямыми пары T' конгруэнций.

Можно доказать,что рассматриваемые пары существуют с произволом двух функций одного аргумента.

Т е о р е м а 7. Для того,чтобы пары T конгруэнций,соответствующие прямые которых проходят через фокусы прямых конгруэнции общих перпендикуляров,были парами T' конгруэнций,необходимо и достаточно,чтобы либо соответствующие прямые лежали в фокальных плоскостях конгруэнции общих перпендикуляров,либо соответствующие прямые были параллельны нормалям фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров.

Каждая из рассматриваемых пар T' конгруэнции существует с произволом четырех функций одного аргумента.

Библиографический список

1.Р е д о з у б о в а О.С. Основы метрической теории пар Т конгруэнций/МГПИ им.В.И.Ленина.М.,1980.Деп. в ВИНИТИ.№2993-80.

2.Ф и н и к о в С.П.Теория конгруэнций .М.-Л.,1950.

12 Зак. 1209