УДК 574.76

В. С. Малаховский

(Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград)

ПОЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ НА *n*-ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ СЕМЕЙСТВЕ ОСНАЩЕННЫХ КОЛЛИНЕАЦИЙ *n*-МЕРНЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ

С использованием компьютерной программы автоматического поиска геометрических объектов (см. [1; 2]) найдены поля геометрических объектов на n-параметрическом семействе Π_n оснащенных коллинеаций π n-мерных проективных пространств P_n и p_n [3].

Дана геометрическая характеристика полученных тензоров и квазитензоров. На проективных пространствах P_n и p_n определены четыре типа инвариантных оснащений Бортолотти, позволяющих задавать инвариантные связности.

§1. Фундаментальные геометрические объекты семейства Π_n

Пусть P_n и p_n — два n-мерных проективных пространства с заданными в них областями $U_n \subset P_n$ и $u_n \subset p_n$.

Определение 1.1. *Семейством* Π_n *называется n-параметрическое семейство коллинеаций* $\pi : P_n \to p_n$, *однозначно определяемых парой соответствующих точек* M_0 *и* $m_0 = \pi\left(M_0\right)$, *пробегающих соответствующие области* $U_n \ni M_0$ *и* $u_n \ni m_0$.

Совместим вершину A_0 репера $\{A_0, A_1, ..., A_n\}$ проективного пространства P_n с точкой M_0, а вершину a_0 репера $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$ пространства p_n с точкой m_0. Тогда в неоднородных координатах коллинеация $\pi \in \Pi_n$ определится соотношениями

$$x^i = \frac{M_I^i X^I}{1 - P_I X^I}. \tag{1.1}$$

Здесь и в дальнейшем $i, j, k, ...; I, J, K, ...$ пробегают значения $1, 2, ..., n$.

Деривационные формулы реперов $\{A_\alpha\}$ и $\{a_\alpha\}$ ($\alpha = \overline{0,n}$) имеют вид:

$$dA_0 = \Omega^J A_J + \Omega_0^0 A_0, \;\; da_0 = \omega^i a_i + \omega_0^0 a_0, \tag{1.2}$$

$$\Omega^I \overset{def}{=} \Omega_0^I, \;\; \omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i. \tag{1.3}$$

Так как точки $A_0 \in U_n$, $a_0 \in u_n$ описывают n-мерные области, то

$$\Omega^1 \wedge \Omega^2 \wedge ... \wedge \Omega^n \neq 0, \;\; \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge ... \wedge \omega^n \neq 0. \tag{1.4}$$

Обозначим символом δ дифференцирование по вторичным параметрам, а символами $\Pi_{I'}^{K'}$, $\pi_{i'}^{k'}$ $(I', J', K', i', j', k' = 0, 1, 2, ..., n)$ — значения форм Пфаффа $\Omega_{I'}^{K'}$, $\omega_{i'}^{k'}$ при фиксации образующего элемента — коллинеации π, т.е. при $\Pi^I = 0$, $\pi^i = 0$.

Дифференцируя (1.1) с использованием условий стационарности точек $M = A_0 + X^I A_I$ и $m = a_0 + x^i a_i$, убеждаемся, что формы Пфаффа

$$\Omega^I, \;\; \omega^i, \;\; \nabla M_I^i, \;\; \nabla P_I + \Omega_I^0 - M_J^i \omega_i^0 \overset{def}{=} \Delta P_I \tag{1.5}$$

являются структурными формами коллинеации $\pi \in \Pi_n$.

Здесь и в дальнейшем символ ∇ означает абсолютное дифференцирование с учетом прибавления членов с диагональными формами Ω_0^0, ω_0^0, взятыми со знаком плюс для нижних индексов и со знаком минус для верхних индексов с кратностью, равной числу индексов.

Учитывая (1.4), примем формы Пфаффа Ω^I за базисные и запишем систему пфаффовых уравнений семейства Π_n в виде

$$\omega^i = \lambda_I^i \Omega^I, \ \nabla M_I^i = M_{IJ}^i \Omega^J, \ \Delta P_I = P_{IJ} \Omega^J. \qquad (1.6)$$

Осуществляя с помощью компьютерной программы моделирования исследования дифференцируемых многообразий и ассоциированных связностей [1, с. 77—107] последовательные продолжения системы (1.6), находим

$$\nabla \lambda_I^i = \lambda_{IJ}^i \Omega^J, \ \Delta M_{IJ}^i = M_{IJK}^i \Omega^K, \ \Delta P_{IJ} = P_{IJK} \Omega^K, \qquad (1.7)$$

$$\Delta \lambda_{IJ}^i = \lambda_{IJK}^i \Omega^K, \ \Delta M_{IJK}^i = M_{IJKL}^i \Omega^L, \ \Delta P_{IJK} = P_{IJKL} \Omega^L, \qquad (1.8)$$

где

$$\Delta \lambda_{IJ}^i \overset{def}{=} \nabla \lambda_{IJ}^i + \lambda_J^i \Omega_I^0 + \lambda_I^i \Omega_J^0 - \left(\lambda_I^i \lambda_J^k + \lambda_I^k \lambda_J^i\right) \omega_k^0,$$

$$\Delta M_{IJ}^i \overset{def}{=} \nabla M_{IJ}^i + M_J^i \Omega_I^0 + M_I^i \Omega_J^0 - \left(M_I^i \lambda_J^k + M_I^k \lambda_J^i\right) \omega_k^0,$$

$$\Delta P_{IJ} \overset{def}{=} \nabla P_{IJ} + P_J \Omega_I^0 + P_I \Omega_J^0 - M_{IJ}^i \omega_i^0, \qquad (1.9)$$

$$\Delta M_{IJK}^i \overset{def}{=} \nabla M_{IJK}^i - 2\left(M_{IJ}^i \Omega_K^0 + M_{JK}^i \Omega_I^0 + M_{IK}^i \Omega_J^0\right) +$$

$$+\left(\lambda_J^j M_{IK}^i + \lambda_J^i M_{IK}^j + M_{IJ}^i \lambda_K^j + M_{IJ}^j \lambda_K^i - M_I^j \lambda_{JK}^i - M_I^i \lambda_{JK}^j\right) \omega_j^0,$$

$$\Delta P_{IJK} \overset{def}{=} \nabla P_{IJK} - 2\left(P_{IJ} \Omega_K^0 + P_{IK} \Omega_I^0 + P_{JK} \Omega_J^0\right) + M_{IJK}^i \omega_i^0.$$

Здесь и в дальнейшем величины λ симметричны по всем нижним индексам, а величины M и P — по любой паре нижних индексов начиная со второго.

Системы величин $\{\lambda_I^i\}$, $\{M_I^i\}$, $\{P_I, M_I^i\}$, $\{\lambda_I^i, \lambda_{JK}^i\}$, $\{\lambda_I^i, M_K^j, M_{JL}^k\}$, $\{P_I, M_{JK}^i, P_{LM}\}$, … образуют последовательность фундаментальных геометрических объектов семейства Π_n.

§2. Поля геометрических объектов, охватываемые полями фундаментальных геометрических объектов

Из (1.6) и (1.7) следует, что системы величин $\{\lambda_I^i\}$ и $\{M_I^i\}$ являются тензорами. В работе рассматриваются только невырожденные семейства Π_n, характеризуемые неравенствами

$$\det\left(\lambda_J^i\right) \neq 0,\ \det\left(M_J^i\right) \neq 0. \tag{2.1}$$

Соотношения

$$\overset{*}{\lambda}{}_i^I \lambda_K^i = \delta_K^I,\ \overset{*}{M}{}_i^I M_K^i = \delta_K^I \tag{2.2}$$

определяют пару взаимных тензоров $\{\overset{*}{\lambda}{}_I^i\}$, $\{\overset{*}{M}{}_I^i\}$, которые вместе с основной парой тензоров $\{\lambda_I^i\}$, $\{M_I^i\}$ определяют аффиноры

$$B_I^K = \overset{*}{\lambda}{}_i^K M_J^i,\ b_i^k = \overset{*}{\lambda}{}_i^K M_K^k,\ B_I^K = \overset{*}{M}{}_i^K \lambda_J^i,\ b_i^k = \overset{*}{M}{}_i^K \lambda_K^k. \tag{2.3}$$

Следы аффиноров

$$B = B_I^I,\ \overset{*}{B} = \overset{*}{B}{}_I^I,\ b = b_i^i,\ \overset{*}{b} = \overset{*}{b}{}_i^i \tag{2.4}$$

являются абсолютными инвариантами семейства Π_n.

Рассмотрим системы величин

$$\Lambda_I = \overset{*}{\lambda}{}_i^K \lambda_{KI}^i,\ M_I = \overset{*}{M}{}_i^K M_{KI}^i. \tag{2.5}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \nabla\Lambda_I &= \Lambda_{IJ}\Omega^J + (n+1)\left(\lambda_I^k\omega_k^0 - \Omega_I^0\right), \\ \nabla M_I &= M_{IJ}\Omega^J - (n+1)\left(\lambda_I^k\omega_k^0 - \Omega_I^0\right). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Следовательно, система величин

$$C_I = \Lambda_I + M_I \tag{2.7}$$

образует тензор, который определяет тензоры

$$m_i = C_K \overset{*}{M}{}_i^K, \quad \lambda_i = C_K \overset{*}{\lambda}{}_i^K. \tag{2.8}$$

Рассмотрим тензор

$$S_I^i = M_I^i - \lambda_I^i, \quad \tilde{S}_i^I = \overset{*}{M}{}_i^I - \overset{*}{\lambda}{}_i^I. \tag{2.9}$$

В общем случае

$$\det\left(S_I^i\right) \neq 0, \quad \det\left(\tilde{S}_i^I\right) \neq 0 \tag{2.10}$$

и можно определить соотношениями

$$\overset{*}{S}{}_i^K S_I^i = \delta_I^K, \quad \overset{*}{\tilde{S}}{}_i^K \tilde{S}_I^i = \delta_I^K \tag{2.11}$$

взаимные им тензоры $\left\{\overset{*}{S}{}_i^K\right\}, \left\{\overset{*}{\tilde{S}}{}_i^K\right\}$. Рассмотрим системы величин

$$r_i = \overset{*}{S}{}_i^K \left(P_K - \frac{1}{n+1}\Lambda_K\right), \quad t_i = \overset{*}{S}{}_i^K \left(P_K + \frac{1}{n+1}M_K\right), \tag{2.12}$$

$$R_J = \overset{*}{\tilde{S}}{}_i^K \left(\frac{1}{n+1}\overset{*}{\lambda}{}_i^K \Lambda_K - \overset{*}{M}{}_i^K P_K\right),$$

$$T_J = \overset{*}{\tilde{S}}{}_i^K \left(\frac{1}{n+1}\overset{*}{\lambda}{}_i^K M_K + \overset{*}{M}{}_i^K P_K\right). \tag{2.13}$$

Так как

$$\nabla r_i = r_{iJ}\Omega^J + \omega_i^0, \quad \nabla t_i = t_{iJ}\Omega^J + \omega_i^0, \tag{2.14}$$

$$\nabla R_I = R_{IJ}\Omega^J + \Omega_I^0, \quad \nabla T_I = T_{IJ}\Omega^J + \Omega_I^0, \tag{2.15}$$

то системы величин $\{r_i\}$, $\{t_i\}$, $\{R_I\}$, $\{T_I\}$ являются квазитензорами.

Используя компьютерную программу автоматического поиска геометрических объектов, находим тензоры

$$h_i = \overset{*}{\lambda}{}_i^I \overset{*}{\lambda}{}_i^I \lambda_{IJ}^j + \overset{*}{\lambda}{}_i^J \overset{*}{M}{}_j^I M_{IJ}^j,$$

$$k_i = \overset{*}{\lambda}{}_j^J \overset{*}{M}{}_i^I \lambda_{IJ}^j + \overset{*}{M}{}_i^J \overset{*}{M}{}_j^I M_{IJ}^j, \tag{2.16}$$

$$H_I = \overset{*}{M}{}_i^J \lambda_{IJ}^i + \overset{*}{M}{}_i^K \overset{*}{M}{}_j^J \lambda_K^j M_{JI}^i,$$

$$K_I = \overset{*}{\lambda}{}_i^J M_{IJ}^i + \overset{*}{\lambda}{}_i^K \overset{*}{\lambda}{}_j^J M_K^j \lambda_{JI}^i, \tag{2.17}$$

$$U_{IJ}^i = \lambda_J^i \overset{*}{\lambda}{}_j^K \lambda_{IK}^j - \lambda_I^i \overset{*}{M}{}_j^K M_{KJ}^j - (n+1)\lambda_{IJ}^i,$$

$$V_{IJ}^i = \lambda_I^i \overset{*}{\lambda}{}_j^K \lambda_{JK}^j + \lambda_J^i \overset{*}{\lambda}{}_j^K \lambda_{IK}^j - (n+1)\lambda_{IJ}^i, \tag{2.18}$$

$$P_{ijI}^{KJ} = \overset{*}{\lambda}{}_i^L \overset{*}{\lambda}{}_j^J \overset{*}{\lambda}{}_k^K \lambda_{IL}^k - \overset{*}{\lambda}{}_i^K \overset{*}{\lambda}{}_j^L \overset{*}{\lambda}{}_k^J \lambda_{IL}^k,$$

$$Q_{ijI}^{KJ} = \overset{*}{M}{}_i^L \overset{*}{M}{}_j^J \overset{*}{M}{}_k^K M_{LI}^k - \overset{*}{M}{}_i^K \overset{*}{M}{}_j^L \overset{*}{M}{}_k^J M_{LI}^k. \tag{2.19}$$

Тензоры (2.8), (2.16), (2.18) порождают восемь дважды ковариантных симметрических тензоров

$$H_{IJ}^{(1)} = h_i U_{(IJ)}^i,\ K_{IJ}^{(1)} = k_i U_{(IJ)}^i,\ L_{IJ}^{(1)} = \lambda_i U_{(IJ)}^i,\ M_{IJ}^{(1)} = m_i U_{(IJ)}^i, \tag{2.20}$$

$$H_{IJ}^{(2)} = h_i V_{(IJ)}^i,\ K_{IJ}^{(2)} = k_i V_{(IJ)}^i,\ L_{IJ}^{(2)} = \lambda_i V_{(IJ)}^i,\ M_{IJ}^{(2)} = m_i V_{(IJ)}^i. \tag{2.21}$$

§3. Геометрические образы, ассоциированные с семейством Π_n

Одновалентные тензоры (2.8), (2.16) определяют в пространстве p_n четыре инвариантные гиперплоскости, проходящие через вершину a_0:

$$m_i x^i = 0,\ \ \lambda_i x^i = 0,\ \ h_i x^i = 0,\ \ k_i x^i = 0. \tag{3.1}$$

Квазитензоры (2.12), (2.13) определяют в пространствах p_n и P_n пару инвариантных гиперплоскостей, не проходящих соответственно через точки a_0 и A_0:

$$r_i x^i + 1 = 0,\ \ t_i x^i + 1 = 0, \tag{3.2}$$

$$R_I X^I + 1 = 0,\ \ T_I X^I + 1 = 0. \tag{3.3}$$

Следовательно, в пространствах p_n и P_n индуцируется пара оснащений Бортолотти. Дважды ковариантные симметрические тензоры (2.20), (2.21) определяют в пространстве P_n инвариантные гиперконусы, проходящие через вершину A_0:

$$\begin{gathered} H_{IJ}^{(1)} X^I X^J = 0, \;\; K_{IJ}^{(1)} X^I X^J = 0, \\ L_{IJ}^{(1)} X^I X^J = 0, \;\; M_{IJ}^{(1)} X^I X^J = 0, \end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered} H_{IJ}^{(2)} X^I X^J = 0, \;\; K_{IJ}^{(2)} X^I X^J = 0, \\ L_{IJ}^{(2)} X^I X^J = 0, \;\; M_{IJ}^{(2)} X^I X^J = 0. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Обратная коллинеация

$$\pi^{-1} : p_n \to P_n \tag{3.6}$$

определяется формулами

$$X^I = \frac{\overset{*}{M}{}_i^I x^i}{1 - P_L \overset{*}{M}{}_i^L x^i}. \tag{3.7}$$

Используя в формулах (3.1), (3.2) коллинеацию π (1.1), а в формулах (3.3), (3.4) и (3.5) коллинеацию π^{-1}, получим соответствующие инвариантные геометрические образы в пространствах P_n и p_n.

Например, пара инвариантных гиперплоскостей в пространстве P_n, отличных от (3.3) и задающих оснащение Бортолотти, определяется уравнениями:

$$\left(r_i M_I^i - P_I\right) X^I + 1 = 0, \;\; \left(t_i M_I^i - P_I\right) X^I + 1 = 0. \tag{3.8}$$

Инвариантные гиперконусы пространства p_n с вершиной в точке a_0 — образы гиперконусов (3.4), (3.5) — задаются уравнениями:

$$h_{ij}^{(1)} x^i x^j = 0, \; k_{ij}^{(1)} x^i x^j = 0, \; l_{ij}^{(1)} x^i x^j = 0, \; m_{ij}^{(1)} x^i x^j = 0, \tag{3.9}$$

$$h_{ij}^{(2)} x^i x^j = 0, \; k_{ij}^{(2)} x^i x^j = 0, \; l_{ij}^{(2)} x^i x^j = 0, \; m_{ij}^{(2)} x^i x^j = 0, \tag{3.10}$$

где

$$h_{ij}^{(1)} = H_{IJ}^{(1)} \overset{*}{M}{}_i^I \overset{*}{M}{}_j^J, \quad k_{ij}^{(1)} = K_{IJ}^{(1)} \overset{*}{M}{}_i^I \overset{*}{M}{}_j^J,$$

$$l_{ij}^{(1)} = L_{IJ}^{(1)} \overset{*}{M}{}_i^I \overset{*}{M}{}_j^J, \quad m_{ij}^{(1)} = M_{IJ}^{(1)} \overset{*}{M}{}_i^I \overset{*}{M}{}_j^J. \qquad (3.11)$$

$$h_{ij}^{(2)} = H_{IJ}^{(2)} \overset{*}{M}{}_i^I \overset{*}{M}{}_j^J, \quad k_{ij}^{(2)} = K_{IJ}^{(2)} \overset{*}{M}{}_i^I \overset{*}{M}{}_j^J,$$

$$l_{ij}^{(2)} = L_{IJ}^{(2)} \overset{*}{M}{}_i^I \overset{*}{M}{}_j^J, \quad m_{ij}^{(2)} = M_{IJ}^{(2)} \overset{*}{M}{}_i^I \overset{*}{M}{}_j^J.$$

Список литературы

1. *Малаховский Н. В.* Компьютерное моделирование исследования дифференцируемых многообразий и ассоциированных связностей // Диф. геом. многообразий фигур. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2006. Вып. 37. С. 77—107.

2. *Малаховский Н. В.* Компьютерное моделирование метода продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева // Диф. геом. многообразий фигур. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2008. Вып. 39. С. 96—101.

3. *Малаховский Н. В.* О семействах коллинеаций многомерных проективных пространств // Диф. геом. многообразий фигур / Калинингр. ун-т. Калининград, 1989. Вып. 20. С. 50 —57.

V. Malakhovsky

FIELDS OF GEOMETRICAL OBJECTS ON THE *n*-PARAMETRIC FAMILY OF THE FRAMED COLLINEATIONS OF THE *n*-DIMENSIONAL PROJECTIVE SPACES

Using computer programs [1; 2] some fields of geometrical objects on the n – parametric family of the framed collineations of the n – dimensional projective spaces P_n and p_n are found. Geometric characteristic of these objects is obtained. On each of the spaces P_n and p_n four types of the Bortolotti`s equipment are found.