Из (23) и (17') вытекает:

$$\vec{b}_{12}\cdot\vec{b}_{33}=0,\ \vec{b}_{22}\cdot\vec{b}_{33}=0,\ \vec{b}_{11}\cdot\vec{b}_{33}=0.$$

Поэтому прямые l_{ij} занимают положения:

$$l_{12}=l_{11}=l_{22}\perp l_{33}.$$

Присоединенная кривая [2] поверхности имеет уравнение:

$$\det\|\sum_{\alpha}(b^{\alpha}_{ij}y^{\alpha}-g_{ij})\|=0. \qquad (24)$$

Если поверхность V_3 несет ∇-сеть Фосса с двумя парами полей сопряженных направлений и поле особой нормали,то уравнение (24) имеет вид:

$$(b^5_{33}y^5-1)(b^4_{12}y^4-g_{12})^2=0.$$

Следовательно,присоединенная кривая распадается на пару совпадающих и прямую им ортогональную.При этом особвя нормаль проходит через точку их пересечения.

3. $l_{12}\perp l_{13}$, l_{23} вырождается в точку.Поверхность V_3 ,удовлетворяющая этим условиям,существует и определяется с произволом девять функций двух аргументов.Если Σ_3 - ∇-сеть Фосса,то из равенств (23) следует:

$$\vec{b}_{22}\cdot\vec{b}_{33}=0,\ \vec{b}_{22}\cdot\vec{b}_{13}=0,\ \vec{b}_{33}\cdot\vec{b}_{12}=0,$$

то есть прямые l_{ij} занимают положения:

$$l_{12}=l_{22}\perp l_{13}=l_{33}.$$

Уравнения (24) в нашем случае есть уравнения вида:

$$a_{\alpha\beta}y^{\alpha}y^{\beta}=0.$$

Дополняя пространство E_5 несобственными точками,можно сказать,что присоединенная кривая распадается на кривую второго порядка и бесконечно удаленную прямую.

Список литературы

1.Б а з ы л е в В.Т. О ∇-сопряженных сетях в пространстве аффинной связности.-Изв.высш.уч.зав."Математика", 1974,№ 5,с,24-30.

2.Б а з ы л е в В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи на P- поверхности евклидова пространства.- "Сиб.мат.журнал",1966,(УП),№3,499-511.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.9 1978

УДК 513.73

Б.А.А н д р е е в

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОМ СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ТОЧЕЧНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ И МНОГООБРАЗИЕМ $R_H(Q)$ ГИПЕР - КВАДРИК АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА.

Изучается локальное биективное отображение φ точечного $(n+1)$-мерного проективного пространства P_{n+1} в специальное многообразие $R_H(Q)$ эллипсоидов n-мерного аффинного пространства A_n.Во 2-й дифференциальной окрестности построены и геометрически охарактеризованы инвариантные алгебраические многообразия,с помощью которых определяются характеристические прямые отображения φ и индуцируемых им отображений.Получена связь касательных к этим отображениям дробнолинейных отображений с соответствующими типами характеристических направлений.

§I. Многообразие $R_H(Q)$

Пусть Q $(n-1)$-мерный эллипсоид n-мерного аффинного пространства A_n с его фундаментальной группой G ,а H -подгруппа группы G ,состоящая из прямых гомотетий и параллельных переносов.Обозначим $R_H(Q)$ орбиту действия группы H на пространстве $R(Q)$ эллипсоидов.

Пусть Q_0 -произвольный элемент из $R_H(Q)$, H_0 -одномерная подгруппа группы H, состоящая из гомотетий с неподвижной точкой эллипсоида Q_0 ,а $T\subset H$ -группа параллельных переносов. H является полупрямым произведением групп T и H_0 и при этом действует на $R_H(Q)$ просто транзитивно.Отсюда получаем:

$$\dim R_H(Q)=n+1. \tag{1.1}$$

Многообразие $R_H(Q)$ расслаивается,с одной стороны, на одномерные многообразия концентрических эллипсоидов и, с другой - на n-мерные многообразия эллипсоидов,являющихся орбитами действия группы T .Будем обозначать символами $R_{H_0}(Q)$ и $R_T(Q)$ соответственно слои первого и второго расслоений,содержащие элемент Q ,а символами Π_{H_0} и Π_T соответственно,отображения $\Pi_{H_0}: R_H(Q)\to R_{H_0}(Q_0)$ и $\Pi_T: R_H(Q)\to R_T(Q_0)$, причем $\Pi_{H_0}(Q)=R_{H_0}(Q_0)\cap R_T(Q)$ и $\Pi(Q)=R_T(Q_0)\cap R_{H_0}(Q)$.

Поместив начало A репера $\tau=\{A,\bar{e}_i\}$ $(i,j,\ldots=1,\ldots,n)$ пространства A_n в центр эллипсоида Q_0 ,запишем его уравнение в виде

$$a_{ij}x^ix^j=1. \tag{1.2}$$

Если уравнение произвольного эллипсоида $Q\in R_H(Q)$ имеет вид:

$$a_{ij}x^ix^j-2b^ja_{ij}x^i=c^2-a_{ij}b^ib^j, \tag{1.3}$$

то для $\Pi_{H_0}(Q)$ и $\Pi_T(Q)$ имеем соответственно:

$$a_{ij}x^ix^j=c^2;\quad a_{ij}x^ix^j-2b^ja_{ij}x^i=1-a_{ij}b^ib^j. \tag{1.4}$$

Здесь b^i -координаты центра эллипсоида Q , C - его коэффициент растяжения относительно эллипсоида Q_0 . Можно показать,что многообразие $R_H(Q)$ обладает следующим свойством :любая гиперквадрика пучка,определяемого эллипсоидами $Q_1\in R_H(Q)$ и $Q_2\in R_H(Q)$, также принадлежит многообразию $R_H(Q)$.Таким образом,многообразие $R_H(Q)$ является линейным семейством эллипсоидов, или,как мы будем говорить,подпространством пространства всех гиперквадрик исходного точечного пространства.Легко видеть,что многообразия $R_{H_0}(Q)$ обладают таким же свойством,а многообразия $R_T(Q)$,однако,им не обладают.

Обозначим символами $R_H(Q,Q_0)$ и $R_T(Q_0)\times R_{H_0}(Q_0)$ соответственно пространство $R_H(Q)$ с фиксированным элементом Q_0 и множество пар $(\Pi_T(Q),\Pi_{H_0}(Q))$.Биекция $\mathcal{J}$:

$$\mathcal{J}:\ (\Pi_T(Q),\Pi_{H_0}(Q))\in R_{H_0}(Q_0)\to Q\in R_H(Q,Q_0)$$

превращает $R_H(Q,Q_0)$ в прямое произведение,в котором второй сомножитель $R_{H_0}(Q_0)$ находится во взаимно-однозначном соответствии с числовой полупрямой R_1^+: $t=\ln C,\ t\in R_1^+$, а первый - $R_T(Q_0)$-с пространством A_n .Рассматривая последнее как метрическое пространство с тензором a_{ij} ,а R_1^+-как метрическое пространство с естественной метрикой, будем называть естественной метрикой в $R_H(Q,Q_0)$ метрику, порожденную в нем структурой прямого произведения.

Первичными формами эллипсоида (1.2) в подвижном репере с деривационными формулами

$$d\bar{A}=\omega^i\bar{e}_i,\quad d\bar{e}_i=\omega_i^j\bar{e}_j$$

и уравнениями структуры

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \quad \mathcal{D}\omega_i^j = \omega_i^\ell \wedge \omega_\ell^j$$

являются формы Пфаффа

$$\omega^i, \quad \theta_{ij} \equiv d a_{ij} - a_{i\ell}\,\omega_j^\ell - a_{\ell j}\,\omega_i^\ell . \qquad (1.5)$$

Примем за независимые первичные формы многообразия следующие пфаффовы формы:

$$\omega^i, \quad \theta \stackrel{d}{=} -\frac{1}{2n} a^{ij}\theta_{ij} \equiv -\frac{1}{2n} d\ln a + \frac{1}{n}\omega_i^i , \qquad (1.6)$$

где $a = \det(a_{ij})$, а a^{ij} –тензор,взаимный к тензору a_{ij}. Тогда дифференциальные уравнения многообразия $R_H(Q)$ примут вид:

$$\theta_{ij} = -2\,a_{ij}\,\theta , \qquad (1.7)$$

среди которых $C_{n+1}^2 - 1$ независимых.

§2.Отображение φ .Касательные отображения

Рассмотрим биективное отображение φ некоторой области $\mathcal{U}$ $(n+1)$-мерного точечного проективного пространства P_{n+1} в многообразие $R_H(Q)$.Поместив вершину R_o подвижного репера $R = \{R_o, R_\mathcal{J}\}$, $(\mathcal{J}, \mathcal{K}, \ldots = 1, \ldots, n+1)$ пространства P_{n+1} в произвольную точку $P_o \in \mathcal{U}$,запишем дифференциальные уравнения отображения φ в виде:

$$\omega^i = \Lambda_\mathcal{J}^i \Omega_o^\mathcal{J}, \qquad (2.1)$$

$$\theta = \Lambda_\mathcal{J}^i \Omega_o^\mathcal{J}, \qquad (2.2)$$

где $\Omega_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{J}'}$ $(\mathcal{J}', \mathcal{K}', \ldots = 0, 1, \ldots, n+1)$ –компоненты инфинитезимальных перемещений репера R .В результате двукратного продолжения системы (2.1),(2.2) имеем:

$$\Delta\Lambda_\mathcal{J}^i = \Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}}^i \Omega_0^\mathcal{K}, \quad \Delta\Lambda_\mathcal{J} = \Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}} \Omega_o^\mathcal{K},$$

$$\Delta\Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}}^i = \Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}\mathcal{L}}^i \Omega_o^\mathcal{L}, \quad \Delta\Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}} = \Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}\mathcal{L}} \Omega_o^\mathcal{L},$$

где

$$\Delta\Lambda_\mathcal{J}^i \equiv d\Lambda_\mathcal{J}^i + \Lambda_\mathcal{J}^t \omega_t^i - \Lambda_T^i \Omega_\mathcal{J}^T + \Lambda_\mathcal{J}^i \Omega_o^o,$$

$$\Delta\Lambda_\mathcal{J} \equiv d\Lambda_\mathcal{J} - \Lambda_T \Omega_\mathcal{J}^T + \Lambda_\mathcal{J} \Omega_o^o,$$

$$\Delta\Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}}^i \equiv d\Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}}^i + \Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}}^t \omega_t^i - \Lambda_{T\mathcal{K}}^i \Omega_\mathcal{J}^T - \Lambda_{\mathcal{J}T}^i \Omega_\mathcal{K}^T + 2\Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}}^i \Omega_o^o + \Lambda_\mathcal{J}^i \Omega_\mathcal{K}^o + \Lambda_\mathcal{K}^i \Omega_\mathcal{J}^o,$$

$$\Delta\Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}} \equiv d\Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}} - \Lambda_{T\mathcal{K}} \Omega_\mathcal{J}^T - \Lambda_{\mathcal{J}T} \Omega_\mathcal{K}^T + 2\Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}} \Omega_o^o + \Lambda_\mathcal{J} \Omega_\mathcal{K}^o + \Lambda_\mathcal{K} \Omega_\mathcal{J}^o .$$

Пусть $Q_o = \varphi(P_o)$.Отображение $\varphi: \mathcal{U} \to R_H(Q)$ для каждой фиксированной P_o индуцирует отображения $\varphi_T = \Pi_T \circ \varphi: \mathcal{U} \to R_T(Q_o)$ и $\varphi_{H_o} = \Pi_{H_o} \circ \varphi: \mathcal{U} \to R_{H_o}(Q_o)$, дифференциальные уравнения которых записываются соответственно в виде (2.1) и (2.2). Для координатных представлений отображений φ_T и φ_{H_o} имеем:

$$b^i = \Lambda_\mathcal{J}^i \widetilde{X}^\mathcal{J} + \Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}}^i \widetilde{X}^\mathcal{J} \widetilde{X}^\mathcal{K} + \langle 3 \rangle , \qquad (2.3)$$

$$\ln C = \Lambda_\mathcal{J} \widetilde{X}^\mathcal{J} + \Lambda_{\mathcal{J}\mathcal{K}} \widetilde{X}^\mathcal{J} \widetilde{X}^\mathcal{K} + \langle 3 \rangle , \qquad (2.4)$$

где b^i, –координаты эллипсоидов (1.4), $\widetilde{X}^\mathcal{J}$ –неоднородные координаты точки $P \in \mathcal{U}$,а символ $\langle 3 \rangle$ означает совокупность членов 3-го порядка малости относительно $\widetilde{X}^\mathcal{J}$. Обозначим $X^\mathcal{J}$ однородные координаты в P_{n+1}.Тензоры

I-го порядка Λ^i_J и Λ_J определяют подпространства в P_{n+1}:

$$\Lambda^i_J X^J = 0, \qquad (2.5)$$

$$\Lambda_J X^J = 0 \qquad (2.6)$$

размерностей 1 и n, содержащие точку P_o, являющиеся в ней касательными подпространствами для многообразий $\varphi^{-1}(R_{H_o}(Q_o))$ и $\varphi^{-1}(R_T(Q_o))$ и обозначаемые в дальнейшем соответственно символами L^o_T и $L^o_{H_o}$.

Уравнения касательных к φ_T и φ_{H_o} дробнолинейных отображений $K_T(P_J)$ и $K_{H_o}(Q_J)$ имеют соответственно вид:

$$b^i = \frac{\Lambda^i_J \tilde{X}^J}{1 - P_\varkappa \tilde{X}^\varkappa}, \qquad (2.7)$$

$$\ln C = \frac{\Lambda_J \tilde{X}^J}{1 - Q_\varkappa \tilde{X}^\varkappa}. \qquad (2.8)$$

Системы величин $\{P_J\}$ и $\{Q_J\}$ являются квазитензорами. Отображения (2.7) и (2.8) вырождены; в их области определения выполняется: $\Im m\, K_T(P_J)(L^o_T) = Q_o$, $\Im m\, K_{H_o}(Q_J)(L^o_{H_o}) = Q_o$. Во множестве пар $K(P_J, Q_\varkappa) = (K_T(P_J), K_{H_o}(Q_\varkappa))$ рассмотрим подмножество пар $K(P_J)$ согласованных отображений, характеризующихся равенством $Q_J = P_J$. Однопараметрические семейства эллипсоидов: $b^i = b^i_o t$, $C = C_o^t$ являются геодезическими метрического пространства $R_H(Q, Q_o)$ с введенной ранее естественной метрикой.

Т е о р е м а 1. Образы прямых связки $\{P_o\}$ при согласованных отображениях $K(P_J)$ являются геодезическими пространства $R_H(Q, Q_o)$.

Утверждение теоремы справедливо также для всех прямых, не лежащих в гиперплоскости $P_J X^J = X^o$.

§ 3. Индикатрисы. Характеристические направления

Назовем инвариантные многообразия

$$\Lambda^i_{J\varkappa} X^J X^\varkappa - 2\Lambda^i_J X^J X^o = 0,$$

$$\Lambda_{J\varkappa} X^J X^\varkappa - 2\Lambda_J X^J X^o = 0$$

соответственно T-индикатрисой $\mathcal{J}_T$ и H_o-индикатрисой $\mathcal{J}_{H_o}$. В общем случае T-индикатриса (H_o-индикатриса) является алгебраическим многообразием размерности 1 (n) и порядка 2^n (2), содержит точку P_o и имеет в этой точке касательным подпространством подпространство L^o_T (L_{H_o}).

Рассуждая так же, как в §2 работы [1], получим понятие $K_T(P_J)$-($K_{H_o}(Q_J)$)-главных прямых отображения φ_T (φ_{H_o}).

О п р е д е л е н и е 1. Точка A, не принадлежащая подпространству L^o_T (подпространству $L^o_{H_o}$), называется φ_T-(φ_{H_o})-главной, если существует касательное к φ_T (к φ_{H_o}) дробно-линейное отображение $K_T(P_J)$ ($K_{H_o}(Q_J)$), такое, что, когда прямая P_oA является $K_T(P_J)$-($K_{H_o}(Q_J)$)-главной, то выполняется: $\lim\limits_{B\to A} b^i = \infty$ ($\lim\limits_{B\to A} C = \infty$), $B \in P_{n+1}$.

Следующие две теоремы доказываются так же, как теоремы 1 и 2 работы [1].

Т е о р е м а 2. На каждой $K_T(P_J)$-($K_{H_o}(Q_J)$)-главной прямой существует единственная φ_T-(φ_{H_o})-главная точка.

Т е о р е м а 3. Множества $J_T \setminus (J_T \cap L^\circ_T)$ и $J_{H_0} \setminus (J_{H_0} \cap L^\circ_{H_0})$ являются соответственно множествами φ_T-главных и φ_{H_0}-главных точек.

О п р е д е л е н и е 2. Прямая связки $\{P_0\}$ называется T-характеристической (характеристической) прямой отображения φ, если она имеет непустое пересечение с множеством $J_T \setminus (J_T \cap L^\circ_T)$ (с множеством $(J_T \cap J_{H_0}) \setminus P_0$).

Заметим, что, определяя аналогично, с помощью J_{H_0}, H_0, характеристические прямые, мы получим любую прямую, не лежащую в $L^\circ_{H_0}$, что связано с одномерностью многообразия $H_0(Q_0)$.

Понимая касание одномерных многообразий Q как касание кривых в пространстве с введенной естественной метрикой, а касание отображений - в соответствии с §1 [2], сформулируем следующую теорему.

Т е о р е м а 4. Отображение $\varphi_T(\varphi)$ имеет геометрическое касание 2-го порядка с отображением $K_T(P_\gamma)(K(P_\gamma))$ для T-характеристических (характеристических) направлений отображения φ.

Доказательство проводится аналогично доказательству теорем 6 и 8 работы [3].

Список литературы

1.А н д р е е в Б.А. О дифференцируемом соответствии между точечным пространством и пространством пары.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7.Калининград,1976,с.5-9.

2.Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами.-"Итоги науки, ВИНИТИ.Геометрия",1963,М.,1965,с.65-107.

3.А н д р е е в Б.А. Характеристические направления соответствия между точечным пространством и пространством пары (p,q).В кн.:-Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.6,Калининград,1975,с.5-18.