N. Ryazanov

Differential comparisons for components of curvature of the second order affine connection in non-symmetrical case

Differential comparisons for the components of the curvature object of affine connection of the second order in the case of non-symmetric connection object are obtained. These comparisons show that in the general case the second order curvature object forms a geometric object only with the first order curvature object and the second order connection object.

Key words: structure equations of Laptev; affine connection; the second order curvature object; holonomic, semi-holonomic and non-holonomic smooth manifolds.

УДК 514.76, 501

К. В. Семенов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
ksemen@mech.math.msu.su

Условия существования преобразований Бэклунда для эволюционных уравнений третьего порядка с одной пространственной переменной

Изучаются уравнения в частных производных третьего порядка эволюционного типа с одной пространственной переменной и ассоциированные с ними дифференциально-геометрические структуры. Преобразованиям и отображениям Бэклунда дается инвариантная геометрическая интерпретация. Указаны условия, кото-

рым должны удовлетворять такие уравнения, чтобы для них существовали преобразования и отображения Бэклунда.

***Ключевые слова**:* эволюционные уравнения, связности в расслоениях, преобразования Бэклунда, отображения Бэклунда, связность Бэклунда.

Работа посвящена геометрической теории преобразований Бэклунда для эволюционного уравнения 3-го порядка с одной пространственной переменной. Преобразования Бэклунда — это специальный искусственный прием получения солитонных решений дифференциальных уравнений с частными производными, предложенный в конце XIX века.

Этот прием заключается в следующем. Пусть имеется уравнение

$$F(t,x,z,z_i,z_{ij},z_{jkl},\ldots)=0\,, \qquad (*)$$

где (t,x) — независимые переменные, $z(t,x)$ — неизвестная функция. Говорят, что соотношения вида: $y_t = f(t,x,z,z_i,\ldots)$, $y_x=\varphi(t,x,z,z_i,\ldots)$, удовлетворяющие равенству $y_{tx}=y_{xt}$ или $f_x=\varphi_t$, *задают преобразования Бэклунда* уравнения (*) в уравнение (**), если в итоге получается уравнение

$$\Phi(t,x,y,y_i,y_{ij},y_{jkl},\ldots)=0 \qquad (**)$$

относительно новой неизвестной функции y.

Такое определение преобразований Бэклунда не является геометрически инвариантным.

Однако можно предложить геометрически инвариантную интерпретацию преобразований Бэклунда — как задание специальной связности в ассоциированном расслоении с одномерным типовым слоем.

Эта специальная связность порождается связностью в главном расслоении, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения (*).

Следуя Ф. Пирани и Д. Робинсону [3], мы рассматриваем *преобразование Бэклунда* как частный случай более общего понятия *отображения Бэклунда.*

Задание отображения Бэклунда интерпретируется как задание связности, определяющей представление нулевой кривизны для заданного эволюционного уравнения.

О геометрической теории преобразований Бэклунда уравнений 2-го порядка (см.: [1, 2]).

Рассматриваются эволюционные уравнения третьего порядка с одной пространственной переменной — уравнения вида:

$$z_t = f(t, x, z, z_x, z_{xx}, z_{xxx})\,. \tag{1}$$

В качестве допустимых преобразований координат рассматриваются следующие преобразования: $\tilde{t} = \tilde{t}(t)$, $\tilde{x} = \tilde{x}(t, x)$, $\tilde{z} = \tilde{z}(t, x, z)$; при таких преобразованиях исходное уравнение останется эволюционным.

Имеется следующая последовательность расслоенных пространств:

$$\begin{array}{ccccccc}
M & & E & & J^1E & & J^2E \\
(t,x) & \leftarrow & (t,x,z) & \leftarrow & (t,x,z,p^0,p^1) & \leftarrow & (t,x,z,p^0,p^1,\ldots,p_{11}^{2+1}) \\
\omega^0,\omega^1 & & \omega^0,\omega^1,\omega^{2+1} & & \omega^0,\omega^1,\omega^{2+1},\omega_0^{2+1},\omega_1^{2+1} & & \omega^0,\omega^1,\omega^{2+1},\omega_0^{2+1},\omega_1^{2+1},\ldots,\omega_{11}^{2+1},
\end{array}$$

здесь $J^k E$ — расслоения струй сечений порядка k над базой E, которая сама является расслоенным многообразием над расслоенной базой M.

Структурные формы $\omega^0, \omega^1, \omega^{2+1}, \omega_0^{2+1}, \omega_1^{2+1}, \ldots, \omega_{11}^{2+1}$, в силу сделанного замечания о виде допустимых преобразований координат удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^0 = \omega^0 \wedge \omega_0^0,\quad d\omega^1 = \omega^0 \wedge \omega_0^1 + \omega^1 \wedge \omega_1^1,$$

$$d\omega^{2+1} = \omega^0 \wedge \omega_0^{2+1} + \omega^1 \wedge \omega_1^{2+1} + \omega^{2+1} \wedge \omega_{2+1}^{2+1}$$

и тем уравнениям, что получаются из уравнений этой системы в результате *правильного продолжения* (последовательного внешнего дифференцирования и последующего применения Леммы Картана).

Анализируя структурные уравнения, заметим, что у расслоений $J^k E$ есть фактор-расслоения $J^{*k}E$; например, $J^{*2}E$ со структурными формами $(\omega^0, \omega^1, \omega^{2+1}, \omega_1^{2+1}, \omega_{11}^{2+1})$. Это следует из того, что системы структурных форм $J^{*k}E$ оказываются вполне интегрируемыми.

Вместе с расслоениями струй $J^k E$ мы рассматриваем расслоения реперов $R^k E$ и их фактор-расслоения $R^{*k}E$. Если обозначить $\omega = \omega_1^1 - \omega_0^0$, то структурными формами фактор-расслоений $R^{*1}E$ и $R^{*2}E$ будут формы $(\omega^0, \omega^1, \omega^{2+1}, \omega_1^{2+1}, \omega, \omega_0^1)$ и $(\omega^0, \omega^1, \omega^{2+1}, \omega_1^{2+1}, \omega_{11}^{2+1}, \omega, \omega_0^1)$.

В расслоении $R^{*2}E$ вводится связность с формами:

$$\tilde{\omega}_0^1 = \omega_0^1 + \gamma_{00}^1\omega^0 + \gamma_{01}^1\omega^1,\ \tilde{\omega} = \omega + \gamma_0^1\omega^0 + \gamma_1^1\omega^1.$$

На поднятиях сечений $\sigma \subset E$ $z = z(t,x)$, $p_i = z_i$, $p_{ij} = z_{ij}, \ldots$, в качестве главных форм можно выбрать *контактные формы:*

$$\omega^0 = dt, \omega^1 = dx,\ \omega^{2+1} = dz - p_0 dt - p_1 dx,$$
$$\omega_0^{2+1} = dp_0 - p_{00}dt - p_{01}dx, \ldots .$$

При таком выборе главных форм $\omega_0^0 = \omega_1^1 = \omega_0^1 = 0$ и формы введенной в $R^{*2}E$ связности примут вид:

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_0^1 = \gamma_{00}^1(t,x,z,p_1,p_{11})dt + \gamma_{01}^1(t,x,z,p_1,p_{11})dx, \\ \tilde{\omega} = \gamma_0^1(t,x,z,p_1,p_{11})dt + \gamma_1^1(t,x,z,p_1,p_{11})dx. \end{cases}$$

В результате на поднятиях сечений $\sigma \subset E$ структурные уравнения форм введенной в $R^{*2}E$ связности примут вид:

$$d\tilde{\omega}_0^1 = \tilde{\omega}_0^1 \wedge \tilde{\omega} + 2\rho_{001}^1 dt \wedge dx,\ d\tilde{\omega} = 2\rho_{01} dt \wedge dx.$$

Говорят, что введенная таким образом в $R^{*2}E$ связность *определяет представление нулевой кривизны* для уравнения (1), если $\rho_{01} = 0$ и $\rho_{001}^1 = 0$ на поднятиях сечений $\sigma \subset E$ и только на них.

Дадим определение *связности Бэклунда*. Для этого рассмотрим ассоциированное расслоение $F(R^{*2}E)$ с одномерным типовым слоем F.

Связность в этом ассоциированном расслоении называется *связностью Бэклунда*, если она порождена упомянутой выше специальной связностью в $R^{*2}E$, определяющей представление нулевой кривизны для уравнения (1).

Если $\tilde{\theta}$ — форма связности Бэклунда, то уравнение Пфаффа $\underset{\sigma}{\tilde{\theta}}=0$ (здесь $\sigma \subset E$ — сечение $z=z(t,x)$) имеет вид

$$dy - y\cdot\underset{\sigma}{\tilde{\omega}} - \underset{\sigma}{\tilde{\omega}_0^1} = 0,$$

что приводит к системе

$$\begin{cases} y_t = -y\cdot\gamma_0(t,x,z,z_x,z_{xx}) + \gamma_{01}^1(t,x,z,z_x,z_{xx}), \\ y_x = -y\cdot\gamma_1(t,x,z,z_x,z_{xx}) + \gamma_{01}^1(t,x,z,z_x,z_{xx}). \end{cases}$$

Именно эти соотношения мы и трактуем, как *отображение Бэклунда*.

Условие, что связность в расслоении $R^{*2}E$ должна определять представление нулевой кривизны для исходного уравнения (1), при рассмотрении коэффициентов ρ_{01} и ρ_{001}^1 позволяет уточнить вид самого уравнения (1).

Установлено, что эволюционное уравнение третьего порядка с одной пространственной переменной допускает определяемое таким способом отображение Бэклунда в том случае, если оно имеет вид

$$z_t + K(z,z_x,z_{xx})\cdot z_{xxx} + L(z,z_x,z_{xx}) = 0. \qquad (2)$$

Если мы будем рассматривать частный случай уравнений вида (2), а именно следующие уравнения:

$$z_t + z_{xxx} + M(z,z_x) = 0,$$

то выясняется, что такие уравнения допускают отображения Бэклунда в указанном выше смысле только, если они имеют следующий вид:

$$z_t + z_{xxx} + \beta(z)\cdot(z_x)^2 + \alpha(z)\cdot z_x = 0\,.$$

Среди этих уравнений содержатся уравнения вида (при $\beta(z)=0$)

$$z_t + z_{xxx} + \alpha(z)\cdot z_x = 0\,. \tag{3}$$

Одним из них является известное уравнение Кортевега — де Фриза:

$$z_t - z_{xxx} - 6z\cdot z_x = 0\,.$$

Установлено, что уравнения вида (3) допускают преобразования Бэклунда в указанном смысле, только если эти уравнения имеют вид

$$z_t + z_{xxx} + \frac{\varphi(z)}{az+b}\cdot z_x = 0\,.$$

При этом система уравнений с частными производными, задающая преобразование Бэклунда, имеет такой вид:

$$\begin{cases} y_t = -y\cdot\left(-z_{xx}\cdot(az+b)+\frac{a}{2}(z_x)^2+\Phi(z)\right)-z_{xx}\cdot k\cdot(az+b)+k\cdot\left(\frac{a}{2}(z_x)^2+\Phi(z)\right), \\ y_x = (-y+k)\cdot\left(\frac{a}{2}z^2+bz+c\right), \end{cases}$$

где $a,b,c,k = const$, $\Phi(z)$ — первообразная для $\varphi(z)$.

Список литературы

1. *Рыбников А.К., Семенов К.В.* Связности Бэклунда и отображения Бэклунда, соответствующие эволюционным уравнениям второго порядка // Известия вузов. Математика. 2004. №5. С. 52—68.

2. *Рыбников А.К.* Теория связностей и проблема существования преобразований Бэклунда для эволюционных уравнений второго порядка // ДАН. 2005. Т. 400, №3. С. 319—322.

3. *PiraniF.A.E., RobinsonD.C.* Sur la definition des transformations de Backlund // C.R. Acad. Sc. Paris ; Serie A, T. 285. P. 581—583.

K. Semenov

Conditions of the existence of Backlund transformations for the evolution-type PDEs of the third order with one dimensional variable

Evolution-type partial differential equations of the third order with one dimensional variable and their associated geometrical structures are studied. The invariant interpretation in terms of differential geometry is given to the Backlund transformations and Backlud mappings. The conditions for such equations to possess these transformations and mappings are found.

Key words: evolution-type equations, connections in fibre bundles, Backlund transformations, Backlund mappings, Backlund connection.

УДК 514.764.25

С.Е. Степанов, И.И. Цыганок
Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва
s.e.stepanov@mail.ru
Й. Микеш
Оломоуцкий университет, Оломоуц, Чехия

Теорема лиувиллева типа о проективном отображении полного риманова многообразия

Доказывается «теорема исчезновения» для проективного диффеоморфизма полного риманова многообразия. При доказательстве будет использована известная L^p-лиувиллева теорема Яу об ограниченных функциях на полных римановых многообразиях.

Ключевые слова: полное риманово многообразие, проективный диффеоморфизм.