ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.19 1989

УДК 514.76

ИНДУЦИРОВАННЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ГРУППАХ ЛИ

Ю.Д.Чурбанов
(г.Минск)

В работе рассматриваются задачи для групп Ли, которые для Φ -пространств решены в работах [1,3].

Пусть G -группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, H -ее замкнутая подгруппа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$, Φ - автоморфизм H, $\varphi=(d\Phi)_e$, φ_1 является продолжением φ до автоморфизма алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Выберем в $\mathfrak{g}$ подпространство N, дополнительное к $\mathfrak{h}$, по которому построим левоинвариантное N-оснащение подгруппы Ли $N_g=(dL_g)_e N$, $g\in H$ [5]. Пространство N будем называть нормалью N-оснащения. Следуя В.В.Балащенко и Н.А.Степанову, левоинвариантное оснащение, построенное по нормали $\varphi_1(N)$, назовем φ_1-сопряженным оснащением, если же $\varphi_1(N)=N$, то оснащение назовем самосопряженным. Всюду в дальнейшем под N-оснащением понимается левоинвариантное N-оснащение, а под (аффинной) связностью - левоинвариантная аффинная связность.

Пусть ∇ -аффинная связность на G, функция Номидзу которой α [4]. Тогда аналогично [5] легко показать, что ∇ индуцирует на H связность $\widetilde{\nabla}$, и, наоборот, любая связность на H индуцируется некоторой связностью группы Ли G, и, если $\widetilde{\alpha}$ - функция Номидзу индуцированной связности, то

$$\widetilde{\alpha}(X,Y)=\alpha(X,Y)_{\mathfrak{h}} \tag{1}$$

$X,Y\in\mathfrak{h}$, где $Z_{\mathfrak{h}}$ обозначает $\mathfrak{h}$ -компоненту элемента $Z\in\mathfrak{g}$ относительно разложения $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus N$. Из определения Φ -инвариантной связности следует, что $\widetilde{\nabla}$ Φ -инвариантна тогда и только тогда, когда

$$\varphi_\alpha(X,Y)=\widetilde{\alpha}(\varphi(X),\varphi(Y)) \tag{2}$$

для всех $X,Y\in\mathfrak{h}$.

Т е о р е м а 1. Связность, индуцированная связностью ∇ группы Ли G вдоль самосопряженного N-оснащения, является Φ -инвариантной тогда и только тогда, когда для всех $X,Y\in\mathfrak{h}$

$$\varphi_1\alpha(X,Y)-\alpha(\varphi(X),\varphi(Y))\in N.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (1),(2) и самосопряженность оснащения, имеем $(\varphi_1\alpha(X,Y))_{\mathfrak{h}}=\alpha(\varphi(X),\varphi(Y))_{\mathfrak{h}}$, откуда вытекает теорема.

Используя определение Φ -преобразованной связности [1], очевидным образом получаем, что связность $\widetilde{\nabla}_1$ является Φ -преобразованной к $\widetilde{\nabla}$ тогда и только тогда, когда для всех $X,Y\in\mathfrak{h}$

$$\varphi\widetilde{\alpha}_1(X,Y)=\widetilde{\alpha}(\varphi(X),\varphi(Y)). \tag{3}$$

Т е о р е м а 2. Пусть связность ∇ группы Ли G с функцией Номидзу α индуцирует на H вдоль N-оснащения связность $\widetilde{\nabla}$, вдоль $\varphi_1(N)$-оснащения - связность $\widetilde{\nabla}_1$. Тогда $\widetilde{\nabla}$ является Φ-преобразованной к $\widetilde{\nabla}_1$ тогда и только тогда, когда для всех $X,Y\in\mathfrak{h}$: $\varphi_1\alpha(X,Y)-\alpha(\varphi(X),\varphi(Y))\in\varphi_1(N)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя (1), (3), а также связь между операторами проектирования вдоль нормалей N и $\varphi_1(N)$ [1], имеем $(\varphi_1\alpha(X,Y))_{\mathfrak{h}}=\alpha(\varphi(X),\varphi(Y))_{\mathfrak{h}}$, где проектирование ведется вдоль нормали $\varphi_1(N)$.

Т е о р е м а 3. Пусть связности ∇ и ∇_1 группы Ли G, функции Номидзу которых α и α_1, индуцируют на H связности $\widetilde{\nabla}$ и $\widetilde{\nabla}_1$ соответственно вдоль самосопряженного N-оснащения. Тогда $\widetilde{\nabla}$ является Φ-преобразованной к $\widetilde{\nabla}_1$ тогда и только тогда, когда для всех $X,Y\in\mathfrak{h}$: $\varphi_1\alpha(X,Y)-\alpha_1(\varphi(X),\varphi(Y))\in N$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Пусть K -некоторая подгруппа Ли в H.

О п р е д е л е н и е 1. Связность на G с функцией Номидзу α назовем K-инвариантной связностью, если для всех $X,Y\in\mathfrak{g}$ и $g\in K$ $Ad(g)\alpha(X,Y)=\alpha(Ad(g)X,Ad(g)Y)$. Аналогично N-оснащение назовем K-инвариантным, если $Ad(g)N\subset N$ для всех $g\in K$.

Т е о р е м а 4. Если H допускает K-инвариантное N-оснащение, то любая K-инвариантная связность группы Ли G индуцирует на H K-инвариантную связность. При этом любая K-инвариантная связность на H индуцируется некоторой K-инвариантной связностью группы Ли G.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если ∇ - K-инвариантная связность на G с функцией Номидзу α, то очевидно, что связность, определяемая по формуле (I), будет K-инвариантной связностью на H. Обратно, если $\tilde{\nabla}$ – K-инвариантная связность на H, то функция Номидзу $\alpha(X,Y) = \tilde{\alpha}(X_{\mathfrak{h}}, Y_{\mathfrak{h}}) + [X,Y]_{N}$, $X,Y \in \mathfrak{g}$ будет определять K-инвариантную связность на G, проекция которой даст $\tilde{\nabla}$.

О п р е д е л е н и е 2. Левоинвариантную аффинную связность ∇ на G назовем коммутативной, если $\nabla_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \nabla_{\tilde{Y}}\tilde{X}$ для всех левоинвариантных векторных полей $\tilde{X}, \tilde{Y}$ на G.

Очевидно, что связность на G с функцией Номидзу α является коммутативной тогда и только тогда, когда для всех $X, Y \in \mathfrak{g}$ $\alpha(X,Y) = \alpha(Y,X)$.

П р е д л о ж е н и е I. Связность на H, индуцированная связностью группы Ли G с функцией Номидзу α вдоль N-оснащения, коммутативна тогда и только тогда, когда для любых $X,Y \in \mathfrak{h}$: $\alpha(X,Y) - \alpha(Y,X) \in N$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы I.

С л е д с т в и е. (+)-связность [4] группы Ли G индуцирует на H коммутативную связность тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}$ является абелевой алгеброй Ли.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\mathfrak{h}$ абелева, то все очевидно. Обратно, используя предложение I, для всех $X,Y \in \mathfrak{h}$ имеем $[X,Y] \in N \cap \mathfrak{h} = \{0\}$.

П р е д л о ж е н и е 2. Если связность группы Ли G с нулевым кручением индуцирует на H (2)-связность [4], то $\mathfrak{h}$ есть абелева алгебра Ли.

П р е д л о ж е н и е 3. Если H -абелева группа Ли, то связность на G с нулевым кручением индуцирует на H коммутативную связность.

З а м е ч а н и е. Отметим, что в силу связи между функциями Номидзу и Вана левоинвариантной аффинной связности группы Ли G [2] любая K-связность на G [3] будет K-инвариантной связностью. Обратное, вообще говоря, неверно.

Библиографический список

I. Б а л а щ е н к о В.В. Индуцирование связностей, порожденных диффеоморфизмом регулярного Φ-пространства линейной группы Ли// Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. Физ., матем. и мех. 1986. №I. С. 56-59.

2. В и н б е р г Э.Б. Инвариантные линейные связности в однородном пространстве// Тр. Моск. матем. о-ва, 1960. Т. 9. С. 191-210.

3. С т е п а н о в Н.А. О φ-пространствах, допускающих инвариантное оснащение// Изв. вузов. Матем. 1982. №2. С. 63-70.

4. Nomizu K. Invariant affine connections on homogeneous spaces // Amer. J. Math. 1954. V76. No1. P. 33-65.

5. Ч у р б а н о в Ю.Д. Индуцированные связности на линейных группах Ли// Вестн. Белорус. ун-та. Сер. I. Физ., матем. и мех. 1986. №3.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. I9 1988

УДК 514.75

О ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ КАРТАНА, ИНДУЦИРОВАННОЙ НА ПОВЕРХНОСТИ

Ю.И. Ш е в ч е н к о
(Калининградский университет)

Найдены условия, при которых классическую проективную связность, индуцированную путем проектирования на поверхности проективного пространства, можно рассматривать как связность в главном расслоении.

I. Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ $(I, J, K = \overline{1,n})$, инфинитезимальные перемещения которого зададим формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A,$$

где θ -несущественная линейная форма, а инвариантные формы $\omega^I, \omega_I^J, \omega_I$ проективной группы $GP(n)$ удовлетворяют структурным уравнениям [I, с. I73], [I3, с. I2I]:

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \qquad d\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,$$

$$d\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J + \omega_I \wedge \omega^J + \delta_I^J \omega_K \wedge \omega^K.$$

В пространстве P_n рассмотрим локально m-мерную поверхность X_m как многообразие ее центрированных касательных плоскостей T_m. Произведем специализацию подвижного репера

$$\{A, A_i, A_a\} \quad (i, j, k, \ell, h = \overline{1,m}; \quad a, b = \overline{m+1,n}),$$

помещая вершины A, A_i на образующую плоскость T_m, причем вершину A – в ее центр. Уравнения поверхности X_m в таком репере нулевого порядка имеют вид $\omega^a = 0$, $\omega_i^a = \Lambda_{ij}^a \omega^j$. Замыкая I-ю подсистему, получим $\Lambda_{ij}^a = \Lambda_{ji}^a$; продолжая 2-ю подсистему,