образом присоединенной к M-распределению в дифференциальной окрестности порядка $t \geqslant 2$, где t – порядок внутренней инвариантной нормали I-го рода $\tilde{q}_{n-m} = [\,\nu,\ \Phi(L_0)]$ M-распределения.

Библиографический список

I. П о п о в Ю.И. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. I. Калинингр. ун-т. Калининград, I984. Деп. в ВИНИТИ 2.07.84. № 448I-84. 94 с.

2. П о п о в Ю.И. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. Ш. Калинингр. ун-т. Калининград, I985. Деп. в ВИНИТИ I9.02.85. № I275-85. 38 с.

3. П о п о в Ю.И. Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства: Монография. С.-Петербург. Изд-во С.-Петербургского ун-та, I992. I72 с.

4. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях и их преобразованиях // Итоги науки и техники. Геометрия. ВИНИТИ. М., I965. Т.4. С. I38-I64.

5. Б а з ы л е в В.Т. Об одном замечательном классе сетей // Проблемы геометрии. ВИНИТИ. М., I975. Т.7. С. I05-II6.

6. О с т и а н у Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., I973. Т.4. С. 7I-I20.

7. О с т и а н у Н.М., Б а л а з ю к Т.Н. Многообразия, погруженные в пространства проективной структуры // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., I978. Т.I0. С. 75-II5.

8. Б а л а з ю к Т.Н. Дифференциальная геометрия m-мерных линейных элементов, оснащенных конусом. Ш. М., I978. Деп. в ВИНИТИ 9.02.I978. № 465-78. 30 с.

9. П о п о в Ю.И. Трехсоставные регулярные распределения $\mathcal{H}^{r}_{m,n-1}$ проективного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, I982. Деп. в ВИНИТИ I6.I2.82. № 6I92-82. I26 с.

I0. П о п о в Ю.И. Инвариантные подпространства, ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. П./Калинингр. ун-т. Калининград, I984. Деп. в ВИНИТИ 9.0I.85. 36 с.

УДК 514.75

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАВНОНАКЛОННЫЕ ПАРЫ Т КОНГРУЭНЦИЙ

О.С.Р е д о з у б о в а

(Московский государственный педагогический университет)

В работе рассмотрены ортогональные пары Т конгруэнций в E_3, которые являются равнонаклонными. Найдены условия равнонаклонности ортогональных пар Т конгруэнций, а также условия, при которых у таких пар постоянно расстояние между соответствующими прямыми.

С парой Т конгруэнций τ_a $(a=1,2)$ связана конгруэнция $\{\tau\}$ общих перпендикуляров. К паре конгруэнций присоединен подвижный ортонормированный репер $R = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ так, что $\tau \parallel \vec{e}_3$, $0 \in \tau$. Направляющие векторы прямых τ_a есть векторы

$$\vec{\eta}_a = \vec{e}_1 \cos\alpha_a + \vec{e}_2 \sin\alpha_a ,$$

где α_a – углы, образуемые векторами $\vec{\eta}_a$ и $\vec{e}_1$

Относительно репера $(0, \vec{e}_3)$ точки $K_a = \tau_a \cap \tau$ имеют координаты h_a. Тогда расстояние между соответствующими прямыми пары равно $|h_1 - h_2|$, а угол между ними $\alpha_1 - \alpha_2$. Относительно реперов $(K_a, \vec{\eta}_a)$ фокусы F_a и F'_a прямых τ_a имеют координаты ρ_a, ρ'_a (абсциссы фокусов).

Компоненты инфинитезимальных преобразований подвижного репера R удовлетворяют условиям:

$$d\vec{0} = \omega^i \vec{e}_i , \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j \quad (i,j = 1,2,3).$$

В соответствии с [I, с.3] пары Т конгруэнций в общем случае, когда $\rho = \rho'_1\rho_2 - \rho_1\rho'_2 \neq 0$, определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{\rho_2\rho'_2(\rho'_1-\rho_1)}{\rho(h_1-h_2)}\cdot\Omega_{13} + Q_1\cdot\dfrac{\rho_2-\rho'_2}{\rho}, \\[2ex] A_2 = \dfrac{\rho_1\rho'_1(\rho_2-\rho'_2)}{\rho(h_1-h_2)}\cdot\Omega_{23} + Q_2\cdot\dfrac{\rho_1-\rho'_1}{\rho}, \\[2ex] H_1 = \dfrac{\rho_1\rho'_1(\rho'_2-\rho_2)}{\rho(h_1-h_2)}\cdot\Omega_{13} + Q_1\cdot\dfrac{\rho_1-\rho'_1}{\rho}, \\[2ex] H_2 = \dfrac{\rho_2\rho'_2(\rho_1-\rho'_1)}{\rho(h_1-h_2)}\cdot\Omega_{23} + Q_2\,\dfrac{\rho'_2-\rho_2}{\rho} \end{cases} \qquad (I)$$

Обозначения берутся из работы [1, с.2,3].

О п р е д е л е н и е. Пары Т конгруэнций называются ортогональными, если соответствующие прямые пары взаимно перпендикулярны.

Рассмотрим ортогональные пары Т конгруэнций в общем случае. Здесь угол между прямыми τ_1 и τ_2 – прямой, т.е. $\alpha_1-\alpha_2 = 90^\circ$. Тогда $A_1 = A_2 \equiv A$. Подставляя $A_1 = A_2$ в систему уравнений (I), получим систему уравнений, определяющую ортогональные пары Т конгруэнций:

$$\begin{cases} A = \Omega_{13}\cdot\dfrac{\rho_2\rho_2'(\rho_1'-\rho_1)}{\rho(h_1-h_2)} + Q_1\dfrac{\rho_2-\rho_2'}{\rho}, \\ H_1 = \Omega_{13}\cdot\dfrac{\rho_1\rho_1'(\rho_2'-\rho_2)}{\rho(h_1-h_2)} + Q_1\dfrac{\rho_1-\rho_1'}{\rho}, \\ H_2 = \Omega_{23}\cdot\dfrac{\rho_2\rho_2'(\rho_1-\rho_1')}{\rho(h_1-h_2)} + Q_2\dfrac{\rho_2'-\rho_2}{\rho}, \\ Q_2 = Q_1\dfrac{\rho_2-\rho_1'}{\rho_1'-\rho_1} + \Omega_{13}\dfrac{\rho_2\rho_2'}{h_1-h_2} - \Omega_{23}\dfrac{\rho_1\rho_1'(\rho_2-\rho_2')}{(\rho_1'-\rho_1)(h_1-h_2)}. \end{cases} \tag{2}$$

Можно доказать, что такие пары определяются с произволом одной функции двух аргументов.

Известно, что равнонаклонные пары Т конгруэнций [1, с.I2 - I5] в общем случае являются парами 2-го типа, в специальном – парами I-го типа.

Рассмотрим ортогональные пары Т конгруэнций 2-го типа. Эти пары конгруэнций получаются из уравнений системы (2), к которой присоединяются условия $\rho_1' = -\rho_2$, $\rho_2' = -\rho_1$:

$$\begin{cases} A = \Omega_{13}\dfrac{\rho_1\rho_2}{(h_1-h_2)(\rho_1-\rho_2)} + Q_1\dfrac{1}{\rho_1-\rho_2}, \\ Q_2 = Q_1 - \Omega_{13}\dfrac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2} - \Omega_{23}\dfrac{\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}, \\ H = A,\ \rho_1' = -\rho_2,\ \rho_2' = -\rho_1,\ H_1 = H_2 \equiv H,\ A_1 = A_2 \equiv A. \end{cases} \tag{3}$$

Т е о р е м а I. Ортогональные пары Т конгруэнций 2-го типа существуют с произволом трех функций одного аргумента. У таких пар расстояние между соответствующими прямыми постоянно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя уравнения системы (3) внешним образом и подставляя выражения A, Q_2 и H из системы уравнений (3), получим следующую систему квадратичных уравнений:

$$\begin{cases} d\rho_1 \wedge \left(\Omega_{13}\cdot\dfrac{\rho_2^2}{h_1-h_2} - Q_1\right) + d\rho_2 \wedge \left(\Omega_{13}^{*}\cdot\dfrac{\rho_1^2}{h_1-h_2} - Q_1\right) + \\ \quad + (\Omega_{13}\wedge\Omega_{13}^{*})\left\{(\rho_1^2+\rho_2^2) + (h_1-h_2)^2\right\} = 0, \\ (\rho_1\, d\rho_2 + \rho_2\, d\rho_1) \wedge (\Omega_{13} + \Omega_{13}^{*}) = 0, \\ \left(Q_1 + \Omega_{13}\cdot\dfrac{(h_1-h_2)^2+\rho_1\rho_2}{h_1-h_2}\right) \wedge (\Omega_{13}+\Omega_{13}^{*}) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Исследование системы уравнений приводит к выводу о том, что рассматриваемые пары существуют с произволом трех функций одного аргумента. Из системы уравнений (3) следует, что $H_1 = H_2$ и, следовательно, $h_1 - h_2 = const$, т.е. расстояние между соответствующими прямыми пары постоянно.

Т е о р е м а 2. Ортогональные пары Т конгруэнций являются парами 2-го типа тогда и только тогда, когда у них равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых и постоянно расстояние между ними.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Допустим, что ортогональные пары Т конгруэнций – 2-го типа. Тогда из системы уравнений (3) следует, что равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых: $\rho_1-\rho_1' = \rho_2-\rho_2'$ и постоянно расстояние между этими прямыми.

2) Дана ортогональная пара Т конгруэнций, у которой $\rho_1-\rho_1' = \rho_2-\rho_2'$ и $h_1-h_2 = const$. Тогда в систему уравнений (2) надо подставить $H_1 = H_2$ и $\rho_1-\rho_1' = \rho_2-\rho_2'$. Сравнивая различные выражения Q_2, получим:

$$\Omega_{13}\cdot\frac{\rho_2\rho_2'-\rho_1\cdot\rho_1'}{h_1-h_2} + \Omega_{23}\cdot\frac{\rho_1\rho_1'-\rho_2\cdot\rho_2'}{h_1-h_2} = 0.$$

Отсюда, в силу линейной независимости форм Ω_{13} и Ω_{23}, получим, что $\rho_1\cdot\rho_1' = \rho_2\cdot\rho_2'$. Подставляя сюда $\rho_2' = \rho_1'-\rho_1+\rho_2$, будем иметь $(\rho_1-\rho_2)(\rho_1'+\rho_2)=0$. Так как $\rho_1=\rho_2$ дает $\rho_2'=\rho_1'$ и выражение $\rho = \rho_1'\rho_2 - \rho_1\rho_2' = 0$, что неверно, то имеем $\rho_1'+\rho_2 = 0$. Тогда $\rho_1' = -\rho_2$, $\rho_2' = -\rho_1$ и, следовательно, пара является парой 2-го типа.

С л е д с т в и е. Ортогональные пары Т конгруэнций являются парами 2-го типа тогда и только тогда, когда равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых и прои-

11 Зак. 1606

зведения абсцисс фокусов этих прямых.

Т е о р е м а 3. Ортогональные пары Т конгруэнций общего вида, у которых равны между собой фокальные расстояния соответствующих прямых, имеют постоянное расстояние между соответствующими прямыми тогда и только тогда, когда эти пары равнонаклонны (2-го типа).

Т е о р е м а 4. Ортогональная пара Т конгруэнций 2-го типа с постоянным произведением абсцисс фокусов каждой конгруэнции пары образована нормалями фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров. Произвол существования таких пар – две функции одного аргумента.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ортогональная пара Т конгруэнций 2-го типа имеет постоянное расстояние и постоянный угол между ними. Это – пара $\tilde{T}$ конгруэнций. По условию $\rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2'= const$. По теореме 2 [2, с.79] такие пары образованы нормалями фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров. Эти пары определяются системой уравнений (3) и условием $\rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2'= const$. Тогда $\rho_1\rho_2=\rho_1'\rho_2'= const$ и $\rho_1 d\rho_2+\rho_2 d\rho_1=0$. Из квадратичных уравнений (4) следует, что независимых квадратичных уравнений – два. Можно доказать, что произвол решения – две функции одного аргумента.

Т е о р е м а 5. У ортогональной пары Т конгруэнций 2-го типа конгруэнции пары являются нормальными тогда и только тогда, когда постоянно произведение абсцисс фокусов каждой конгруэнции пары.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Если имеется ортогональная пара Т конгруэнций 2-го типа, то по теореме I у этой пары $k_1-k_2= const$, т.е. постоянно расстояние между соответствующими прямыми. По следствию из теоремы 2 $\rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2'$. Так как по условию конгруэнции пары – нормальные, то выполняется условие перпендикулярности фокальных плоскостей каждой из конгруэнций пары, т.е. $(k_1-k_2)^2=\rho_a\rho_a'=0$. Отсюда следует $\rho_a\rho_a'= const$.

2. Пусть у ортогональной пары Т конгруэнций 2-го типа $\rho_a\rho_a'= const$. В соответствии с теоремой 2 $\rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2'= const$. Из теоремы 4 следует, что конгруэнции пары есть конгруэнции нормалей фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров.

С л е д с т в и е. Если у ортогональной пары Т конгруэнций 2-го типа конгруэнции, входящие в пару – нормальные, то они являются конгруэнциями нормалей фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров.

Т е о р е м а 6. Дважды ортогональные пары Т конгруэнций 2-го типа образованы нормалями фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматриваемые пары определяются системой уравнений (3), к которой надо присоединить условие ортогональности пары дополнительных конгруэнций F_1F_2, $F_1'F_2'$:

$$\rho_1\rho_1'+\rho_2\rho_2'+(k_1-k_2)^2=0. \qquad (5)$$

Из системы уравнений (3) следует, что $H_1=H_2$. т.е. $k_1-k_2= const$. Тогда из уравнения (5) получается, что $\rho_1\rho_1'+\rho_2\rho_2'= const$. Но в силу следствия из теоремы 2 $\rho_1\rho_1'=\rho_2\rho_2'$. Таким образом, у дважды ортогональных пар Т конгруэнций 2-го типа постоянно произведение $\rho_a\rho_a'$. По теореме 4 такие пары образованы нормалями фокальных поверхностей конгруэнции общих перпендикуляров.

Т е о р е м а 7. Ортогональные пары Т конгруэнций I-го типа имеют постоянное расстояние между соответствующими прямыми тогда и только тогда, когда прямые конгруэнции общих перпендикуляров пересекают соответствующие прямые в их центрах. Можно доказать, что у таких пар конгруэнций конгруэнция общих перпендикуляров – псевдосферическая и $\rho_1'\rho_2=\rho_1\rho_2'= const$.

Библиографический список

I. Р е д о з у б о в а О.С. Основы метрической теории пар Т конгруэнций / МГПИ им. В.И.Ленина. Деп. в ВИНИТИ, №2993.

2. Р е д о з у б о в а О.С. Пары Т конгруэнций, соответствующие прямые которых проходят через фокусы прямых конгруэнции общих перпендикуляров // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, 1992. Вып.23. С.77-81.

11*