УДК 514.75

$\mathcal{H}(l)$-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

И.Е.Л и с и ц ы н а, С.Н.Ю р ь е в а

(Калининградский государственный университет)

Рассматривается класс гиперполосных распределений аффинного пространства – $\mathcal{H}(l)$ -распределение, базовым распределением которого служит распределение прямых, а оснащающим распределением – гиперплоскостное распределение (Н-распределение). Дано задание $\mathcal{H}(l)$-распределения в реперах нулевого и первого порядков. Изучаются ассоциированные фокальные многообразия. Приведено построение нормализации $\mathcal{H}(l)$-распределения в смысле Нордена-Тимофеева, ассоциированной с полем нормалей 1-го рода оснащающего Н-распределения. Работа выполнена по теме гранта (95-0-1.0-22).

Придерживаемся следующей схемы использования индексов: I,J,K=$\overline{1,n}$; a,b,c=$\overline{1,n-1}$; $\alpha,\ \beta,\ \gamma = \overline{2,n-1}$; $\hat\alpha,\ \hat\beta,\ \hat\gamma = \overline{2,n}$.

§1. Задание $\mathcal{H}(l)$-распределения

1. Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n, отнесенное к подвижному реперу R={A, $\vec e_J$ }, уравнения которого имеют вид

$$d\vec A=\omega^J\ \vec e_J,\ d\vec e_J=\omega_J^K\ \vec e_K;\ D\omega^J=\omega^L\wedge\omega_L^J,\ D\omega_J^K=\omega_J^L\wedge\omega_L^K.$$

Совмещая вершину А репера R с текущей точкой пространства A_n, приведем структурные формы точки А к каноническому виду ω^J. Выбранный таким образом репер R обозначим $\tilde R$.

Пусть прямая l задана следующим образом: l=[A, $\vec l_1$]=[A,$\vec e_1+A_1^{\hat\alpha}\ \vec e_{\hat\alpha}$]. Тогда структурные формы распределения прямых l можно представить в виде

$$\Delta\Lambda_1^{\hat\alpha}\overset{\text{def}}{=}\nabla\Lambda_1^{\hat\alpha}-\Lambda_1^{\hat\alpha}\Lambda_1^{\hat\beta}\omega_{\hat\beta}^1+\omega_1^{\hat\alpha}. \tag{1.1}$$

Аналогично, формы

$$\Delta H_a^n\overset{\text{def}}{=}\nabla H_a^n-H_a^nH_b^n\omega_n^b+\omega_a^n \tag{1.2}$$

являются структурными формами многообразия гиперплоскостей: Н=[A,$\vec T_a$], заданных линейно независимыми векторами $\vec T_a=\vec e_a+H_a^n\ \vec e_n$. Погруженные n-мерные многообразия в пространствах представления {$\Delta\Lambda_1^{\hat\alpha}$, ω^J}, {ΔH_a^n, ω^J}, определяемые дифференциальными уравнениями

$$\Delta\Lambda_1^{\hat\alpha}=\Lambda_{1K}^{\hat\alpha}\omega^K,\ \Delta H_a^n=H_{aK}^n\omega^K, \tag{1.3}$$

называются распределениями соответственно прямых $l(A)$ (l-распределение) и гиперплоскостей H(A) (H-распределение). Потребуем, чтобы в некоторой области пространства A_n для любого центра A имеет место соотношение

$$A \in l(A) \subset H(A). \tag{1.4}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пару распределений (1.3) с отношением инцидентности (1.4) их соответствующих элементов назовем $H(l)$-распределением аффинного пространства A_n, в котором распределение прямых $l(A)$ называется базисным распределением, а распределение гиперплоскостей H(A) - оснащающим распределением [1], [2].

$H(l)$- распределение есть частный случай гиперплоскостного ([1],[2] при m=1).

Требование $l(A) \subset H(A)$ приводит к равенству

$$\Lambda_1^n = H_1^n + \Lambda_1^\alpha H_\alpha^n \tag{1.5}$$

Дифференцируя (1.5) и учитывая (1.1), (1.2), (1.3), находим

$$\Lambda_{1K}^n = H_{1K}^n + \Lambda_1^\alpha H_{\alpha K}^n + H_\alpha^n \Lambda_{1K}^\alpha . \tag{1.6}$$

Проведем канонизацию репера $\tilde{R}$: вектор $\vec{e}_1$ направим параллельно прямой $l(A)$, а векторы $\vec{e}_2$ параллельно плоскости H(A). В выбранном репере нулевого порядка R^0 имеем:

$$\Lambda_1^{\hat{\alpha}}=0,\ H_a^n=0, \tag{1.7}$$

а структурные формы (1.1) и (1.2) принимают вид

$$\Delta\ \Lambda_1^{\hat{\alpha}}=\omega_1^{\hat{\alpha}},\ \Delta H_a^n=\omega_a^n. \tag{1.8}$$

В силу (1.7) соотношения (1.6) запишутся следующим образом

$$\Lambda_{1K}^n = H_{1K}^n . \tag{1.9}$$

Итак, уравнения (1.3) с учетом (1.8), (1.9) в репере R^0 примут вид

$$\omega_1^{\hat{\alpha}} = \Lambda_{1K}^{\hat{\alpha}}\omega^K, \quad \omega_\alpha^n = H_{\alpha K}^n\omega^K . \tag{1.10}$$

Продолжая уравнения (1.10), имеем

$$\nabla\Lambda_{1K}^{\hat{\alpha}} + \Lambda_{1K}^n\omega_n^{\hat{\alpha}} = \Lambda_{1KL}^{\hat{\alpha}}\omega^L,\ \nabla H_{\alpha K}^n - \Lambda_{1K}^n\omega_\alpha^1 = H_{\alpha KL}^n\omega^L . \tag{1.11}$$

Таким образом дифференциальные уравнения (1.10), (1.11) задают $H(l)$-распределение относительно репера R^0 нулевого порядка.

2. Из дифференциальных уравнений

$$\nabla H_{\alpha 1}^n - \Lambda_{11}^n\,\omega_\alpha^1 = H_{\alpha 1K}^n\omega^K \tag{1.12}$$

согласно лемме Н.М.Остиану [3] следует, что возможна частичная канонизация репера R^0, при которой $H_{\alpha 1}^n$=0. Тогда

$$\omega_\alpha^1 = -\Lambda_n^{11}H_{\alpha 1K}^n\omega^K \overset{\text{def}}{=} \chi_{\alpha K}^1\omega^K, \quad \text{где } \Lambda_n^{11}\Lambda_{11}^n = 1.$$

Геометрический смысл канонизации состоит в том, что векторы $\vec{e}_\alpha$ репера $\{A,\ \vec{e}_J\}$ параллельны характеристике $\chi(A)$ гиперплоскости H(A) [1], [2]. Репер

$\{A,\ \vec{e}_J\}$, выбранный таким образом, что $\vec{e}_1 \,||\, l(A)$, $\vec{e}_\alpha || \chi(A)$, является репером первого порядка R^1 для $H(l)$-распределения [1], [2].

Относительно репера R^1 $H(l)$-распределение задается следующим образом:

$$\omega_1^n = \Lambda_{1K}^n\omega^K, \quad \omega_1^\alpha = \Lambda_{1K}^\alpha\omega^K,\ \omega_\alpha^n = H_{\alpha K}^n\omega^K, \quad \omega_\alpha^1 = \chi_{\alpha K}^1\omega^K; \tag{1.13}$$

$$\begin{cases}\nabla\Lambda_{1K}^n = \Lambda_{1KL}^n\omega^L, \quad \nabla\Lambda_{1K}^\alpha + \Lambda_{1K}^n\omega_n^\alpha = \Lambda_{1KL}^\alpha\omega^L,\\ H_{\alpha\beta}^n = H_{\alpha\beta K}^n\omega^K, \quad \nabla H_{\alpha n}^n - H_{\alpha\beta}^n\omega_n^\beta = H_{\alpha nK}^n\omega^K,\\ \nabla\chi_{\alpha K}^1 + H_{\alpha K}^n\omega_n^1 = \chi_{\alpha KL}^1\omega^L.\end{cases} \tag{1.14}$$

Геометрические объекты $\Gamma_1=\left\{\Lambda_{1K}^{\hat\alpha},\ H_{\alpha\hat\beta}^n\right\}$, $\Gamma_2=\left\{\Gamma_1,\ \chi_{\alpha K}^1\right\}$ являются фундаментальными [4] геометрическими объектами соответственно 1-го и 2-го порядка гиперполосного распределения $H(l)\subset A_n$.

§2. Фокальные многообразия, ассоциированные с $H(l)$-распределением

1. Рассмотрим $H(l)$-распределение аффинного пространства A_n, заданное в репере R^1 уравнениями (1.13), (1.14). Инвариантная нормаль 1-го рода гиперплоскости $H(A)$ относительно репера R^1 определяется уравнениями

$$y^a - \nu_n^a y^n = 0, \tag{2.1}$$

где величины ν_n^a образуют квазитензор: $\nabla\nu_n^a + \omega_n^a = \nu_{nK}^a\omega^K$.

Тогда плоскость $\Omega_{n-1}(A)=[\nu(A),\ \chi(A)]$, натянутая на инвариантную прямую $\nu(A)$ и характеристику $\chi(A)$ гиперплоскости $H(A)$, определяемая в локальном репере уравнением

$$y^1 = \nu_n^1 y^n, \tag{2.2}$$

является инвариантной нормалью 1-го рода в смысле Нордена-Чакмазяна для прямой $l(A)$. Фокальное многообразие $K_{n-2}(\Omega,l)$ в плоскости $\Omega_{n-1}(A)$, полученное при смещении центра A распределения $H(l)$ вдоль кривых

$$\omega^1 = \mu^1\theta, \ \ \omega^{\hat\alpha} = 0 \ (\mu^1\neq 0,\ d\theta = \theta\wedge\theta_1), \tag{2.3}$$

принадлежащих l-распределению, задается уравнениями

$$y^1 = \nu_n^1 y^n,\ 1 - \chi_\alpha y^\alpha - \hat\nu_n y^n = 0, \tag{2.4}$$

где $\chi_\alpha \overset{\text{def}}{=} \chi_{\alpha 1}^1,\ \ \hat\nu_n = -\nu_{n1}^1 + \nu_n^1\nu_n^1\Lambda_{11}^n + \nu_n^\alpha\chi_{\alpha 1}^1$.

Фокальное многообразие (2.4) представляет собой (n-2) - плоскость $K_{n-2}(\nu)(A)$, которую следуя работам [5], [6], назовем обобщенной плоскостью Кенигса, ассоциированной с инвариантной нормалью $\nu(A)$. Пересечение плоскости Кенигса $K_{n-2}(\nu)(A)$ (2.4) с инвариантной прямой $\nu(A)$ (2.1) есть точка $K_n(\nu)$ - точка Кенигса соответствующей нормали $\nu(A)$, координаты которой в репере R^1 имеют вид

$$y^n = \frac{1}{\hat\chi_n},\ \ y^{\hat\alpha} = \frac{1}{\hat\chi_n}\nu_n^{\hat\alpha} \quad (\hat\chi_n = \chi_\alpha\nu_n^\alpha + \hat\nu_n). \tag{2.5}$$

Фокальное многообразие $K_{n-3}(\chi,l)$ плоскости $\chi_{n-2}(A)$, соответствующее смещению центра A распределения $H(l)$ вдоль кривых (2.3), находим как пересечение фокального многообразия K_{n-2} (Ω, l) (2.4) с плоскостью $\chi_{n-2}(A)$:

$$y^n=0,\ y^1=0,\ 1-\chi_\alpha y^\alpha=0. \qquad (2.6)$$

Фокальное многообразие $K_{n-3}(\chi,l)$ представляет собой (n-3)-плоскость $K_{n-3}(A)$ $\subset K_{n-2}(A)$. Как следует из (2.6) построение плоскости $K_{n-3}(A)$ не зависит от выбора инвариантной нормали $\nu(A)$. В силу этого плоскость $K_{n-3}(A)$ (2.6) назовем осью Кенигса плоскостей $K_{n-2}(\nu)(A)$ (2.4).

Теорема 1. В каждом центре A распределения $H(l)$ инвариантные оснащающие плоскости Кенигса (2.4) всех нормалей 1-го рода $\Omega_{n-1}(A)=[\ (\nu)(A),\ \chi(A)]$ с общей осью (плоскостью $\chi(A)$) принадлежат одной связке, вершина которой есть плоскость $K_{n-3}(A)$ - ось Кенигса (2.6).

Теорема 1 является аналогом соответствующего предложения А.В.Столярова [8, с.32], [2, с.136].

2. Произвольную инвариантную нормаль 1-го рода $N_2(A)=[\nu(A), l(A)]$ плоскости $\chi_{n-2}(A)$ в репере R^1 зададим уравнениями

$$y^\alpha-\nu^\alpha_n y^n=0. \qquad (2.7)$$

Фокальное многообразие F_1 (N_2, χ) в текущем слое N_2-распределения, соответствующее характеристике $\chi(A)$ и ассоциированное с одномерной нормалью $\nu(A)$, определяется системой уравнений:

$$y^\alpha=\nu^\alpha_n y^n,\ \det\left\|\ \delta^\alpha_\beta+(\Lambda^\alpha_{1\beta}-\nu^\alpha_n\Lambda^\alpha_{1\beta})y^1+(\nu^\alpha_{n\beta}-H^n_{\alpha\beta}\nu^\alpha_n\nu^\gamma_n)y^n\right\|=0. \qquad (2.8)$$

Линейная поляра центра A относительно фокального многообразия F_1 (N_2, χ) (2.8) есть прямая $f_1(A)$, которая задается уравнениями

$$1-L_1y^1-\hat{\nu}^\alpha_{n\alpha}y^n=0,\ y^\alpha=\nu^\alpha_n y^n, \qquad (2.9)$$

где $L_1=-\dfrac{1}{n-2}(\Lambda^\alpha_{1\alpha}-\nu^\alpha_n\Lambda^n_{1\alpha})y^1,\ \hat{\nu}^\alpha_{n\alpha}=-\dfrac{1}{n-2}(\nu^\alpha_{n\alpha}-H^n_{\gamma\alpha}\nu^\alpha_n\nu^\gamma_n)$.

Наконец, находим инвариантные точки $L(A)$ и $P(A)$ пересечения прямой $f_1(A)$ (2.9) соответственно с прямыми $l(A)$ и $\nu(A)$:

$$L(A):\ y^\alpha=0,\ y^n=0,\ 1-L_1y^1=0, \qquad (2.10)$$

$$P(A):\ y^\alpha=\nu^\alpha_n\ y^n,\ y^1=\nu^1_n\ y^n,\ 1-\hat{L}_n\ y^n=0,$$

где $\hat{L}_n=L_1\nu^1_n+\hat{\nu}^\alpha_{n\alpha}$. Величина L_1 задает на прямой $l(A)$ инвариантную точку $L(A)\neq A$, которая является нормалью 2-го рода в смысле Нордена для прямой $l(A)$.

§3. Нормализация Нордена -Тимофеева $H(l)$-распределения

(n-2)-мерная плоскость (A)=$[K_{n-3}(A),\ L(A)]$ задается в репере R^1 системой уравнений

$$1-{}_a y^a-0,\ y^n=0, \qquad (3.1)$$

где

$${}_1=L_1,\ {}_\alpha=\chi_\alpha,\ \nabla{}_\alpha={}_{\alpha K}\omega^K. \qquad (3.2)$$

Следуя работе [7, §5, с.46] плоскость (A) назовем плоскостью Нордена-Тимофеева, ассоциированной с одномерной инвариантной нормалью $\nu(A)$. После объекта $\{\ _a\}$ (3.2) задает поле нормалей 2-го рода H-распределения - поле плоскостей Нордена-Тимофеева, инвариантным образом ассоциированное с $H(l)$ -распределением в дифференциальной окрестности порядка $t\geq 2$, где t -порядок охвата нормали $\nu(A)$. Пусть (A) - нормаль 1-го рода H-распределения, заданная объектом $\{\ \}$, и соответствующая в проективитете Бомпьяни-Пантази нормали (A) (3.1) 2-го рода H-распределения.

Предварительно найдем уравнения, определяющие характеристику гиперплоскости H(A) при смещении центра A по кривым

$$\omega^a = {}^a_n\omega^n,\ \omega^n = \mu^n\theta\ (\mu^n \neq 0,\ D\theta = \theta\Lambda\overline{\theta}_1),$$

принадлежащим распределению нормалей. В результате получим

$$1 + (\Lambda^n_{an} + \Lambda^n_{ab}\ {}^b_n)y^a = 0,\ y^n = 0. \tag{3.3}$$

Плоскость (3.3) совпадает с плоскостью Нордена-Тимофеева (3.1) тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$_a = -(\Lambda^n_{an} + \Lambda^n_{ab}\ {}^b_n). \tag{3.4}$$

В общем случае $\Lambda = \det||\Lambda^n_{ab}|| \neq 0$, что позволяет ввести в рассмотрение обращенный тензор $\{\Lambda^{ab}_n\}$, удовлетворяющий уравнениям $\nabla\Lambda^{ab}_n = \Lambda^{ab}_{nK}\omega^K$ и конечным соотношениям $\Lambda^n_{ab}\Lambda^{bc}_n = \delta^c_a\ \Lambda^n_{ab}\Lambda^{ca}_n = \delta^c_b$. Свернув уравнения (3.4) с тензором $\{\Lambda^{ab}_n\}$, представим их в виде

$$^c_n = -\Lambda^{ca}_n(\ _a + \Lambda^n_{an}) \tag{3.5}$$

Таким образом, (n-2)-плоскости (3.3) и (3.1) совпадают тогда и только тогда, когда имеют место формулы (3.5) охвата объекта $\{\ ^c_n\}$, компоненты которого в репере R^1 удовлетворяют уравнениям

$$\nabla\ ^c_n + \omega^c_n = \ ^c_{nK}\omega^K$$

Теорема 2. В дифференциальной окрестности порядка $t\geq 2$ (t- порядок внутренних инвариантных нормалей ν H-распределения) к $H(l)$ -распределению присоединяется внутренняя нормализация в смысле Нордена-Тимофеева, нормали которой находятся в соответствии Бомпьяни - Пантази (3.5).

Библиографический список

1. *Попов Ю.И.* Поля геометрических объектов гиперполосного распределения аффинного пространства / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. Деп. в ВИНИТИ 21.09.87, №6807-В87.

2. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т.7. С.117-151.

3. *Остиану Н.М.* О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RPR). 1962. V.7. N2. P.231-240.

4. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. 1953. №2. С.275-382.

5. *Остиану Н.М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.71-120.

6. *Остиану Н.М., Балазюк Т.Н.* Многообразия, погруженные в пространства проективной структуры // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т.10. С.75-115.

7. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства: Монография. Изд-во С.-Петербург. ун-та, 1992. 172 с.

8. *Столяров А.В.* Двойственная теория регулярных гиперполос и ее приложения: Учеб. пособие. Чебоксары: Изд-во Чувашского ун-та, 1992. 108 с.

I. E. L i s i t s y n a

H(l) - DISTRIBUTION OF AFFINE SPACE

A class of hyperstrip distributions H (l) of affine space is considered whose base distribution is a distribution of lines, and equipping distribution is a hyperplanar distribution (H- distribution). A representation of H(l)- distribution is given in the frames of the first and second order. Associated focal manifolds are studied. A construction of normalization of H(l)- distribution in the sence of Norden-Timofejew is brought, associated with a field of normals of the first genus of an equipping H- distribution.

УДК 514.75

ВЫРОЖДЕННЫЕ ТРЕХМЕРНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ВТОРОГО РОДА ПАР ТОЧЕК В P_4

Е.П. Н о в и к о в а

(*Калининградский государственный университет*)

В четырехмерном проективном пространстве P_4 рассмотрено вырожденное трехмерное многообразие $\mathbf{K = (P_1P_2)^3{}_{2,2}}$ второго рода [1], порожденное точками $\mathbf{P_i}$ **(i, j = 1,2),** описывающими двумерные поверхности (P_i). Построен канонический репер многообразия, найдены ассоциированные геометрические образы.

Отнесем проективное пространство $\mathbf{P_4}$ к подвижному реперу $\mathbf{R = \{A_\alpha\}}$ **(α, β, γ = 1 — 5).** Деривационные формулы репера имеют вид: $\mathbf{dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta}$**,** причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства: $\mathbf{D\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta}$ и условию эквипроективности: $\mathbf{\omega_\alpha^\alpha = 0}$**.**