7. *Banaru M.* On the Gray — Hervella classes of AH-structures on six-dimensional submanifolds of Cayley algebra // Annuaire de l'universite de Sofia «St. Kl. Ohridski». Math. 2004. T. 95. P. 125—131.

8. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии : в 2 т. М., 1981.

M. Banaru

On locally symmetric 6-dimensional Hermitian submanifolds of Cayley algebra

The structural equations of locally symmetric six-dimensional Hermitian submanifolds of Ricci type of octave algebra are obtained. A formula for the bisectional holomorphic curvature of such submanifolds is also given.

УДК 514.75

К. В. Башашина

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

baschaschina@mail.ru

Редукция тензора аффинной кривизны к тензору кривизны фундаментально-групповой связности на поверхности аффинного пространства

В многомерном аффинном пространстве задана аффинная связность с помощью форм связности. Показано, что эта связность задается тензором неканонической аффинной связности, который определяет ее тензоры кривизны и кручения. В аффинном пространстве задана m-мерная поверхность, рассматриваемая как m-параметрическое семейство, описанное касательной плоскостью. В главном расслоении, ассоциированном с поверхностью, задана фундаментально-групповая связность способом Лаптева — Лумисте.

Произведена редукция тензора аффинной кривизны к тензору кривизны фундаментально-групповой связности.

Ключевые слова: аффинная связность, фундаментально-групповая связность, поверхность аффинного пространства, тензор кривизны.

1. Деривационные формулы подвижного репера $R=\{A,\bar{e}_I\}$ ($I,J,K,...=\overline{1,n}$) в n-мерном аффинном пространстве A_n имеют вид [1]

$$d\bar{A}=\omega^I\bar{e}_I,\ d\bar{e}_I=\omega_I^J\bar{e}_J,$$

структурные формы ω^I, ω_J^I удовлетворяют уравнениям

$$d\omega^I=\omega^J\wedge\omega_J^I,\ d\omega_J^I=\omega_J^K\wedge\omega_K^I. \tag{1}$$

Утверждение 1. *Аффинная группа GA(n), эффективно действующая в аффинном пространстве A_n и имеющая структурные уравнения (1), является каноническим пространством аффинной связности без кручения и кривизны.*

Преобразуем слоевые формы ω_J^I с помощью функций Π_{JK}^I:

$$\tilde{\omega}_J^I=\omega_J^I-\Pi_{JK}^I\omega^K. \tag{2}$$

Продифференцируем новые формы внешним образом:

$$d\tilde{\omega}_J^I=\tilde{\omega}_J^K\wedge\tilde{\omega}_K^I+\omega^K\wedge\Delta\Pi_{JK}^I-\Pi_{JK}^M\omega^K\wedge\Pi_{ML}^I\omega^L. \tag{3}$$

Применяя теорему Картана — Лаптева, найдем дифференциальные уравнения на компоненты Π_{JK}^I:

$$\Delta\Pi_{JK}^I\overset{def}{=}d\Pi_{JK}^I+\Pi_{JK}^L\omega_L^I-\Pi_{LK}^I\omega_J^L-\Pi_{JL}^I\omega_K^L=\Pi_{JKL}^I\omega^L. \tag{4}$$

Продолжая дифференциальные уравнения (4), получим

$$\Delta\Pi_{JKL}^I=\Pi_{JKLM}^I\omega^M. \tag{5}$$

Подставим дифференциальные уравнения (4) в структурные уравнения (3):

$$d\tilde{\omega}_J^I = \tilde{\omega}_J^K \wedge \tilde{\omega}_K^I + R_{JKL}^I \omega^K \wedge \omega^L , \qquad (6)$$

где компоненты объекта аффинной кривизны $R = \{R_{JKL}^I\}$ выражаются по формуле

$$R_{JKL}^I = \Pi_{J[KL]}^I - \Pi_{J[K}^M \Pi_{ML]}^I . \qquad (7)$$

Применяя дифференциальный оператор Δ и используя дифференциальные уравнения (4) и (5), получим

$$\Delta R_{JKL}^I \cong 0 \ (\mathrm{mod}\, \omega^I) . \qquad (8)$$

Внесем формы аффинной связности (2) в структурные уравнения (1_1):

$$d\omega^I = \omega^J \wedge \tilde{\omega}_J^I + S_{JK}^I \omega^J \wedge \omega^K , \qquad (9)$$

где $S_{JK}^I = \Pi_{[JK]}^I$ — компоненты тензора аффинного кручения.

Утверждение 2. *Неканоническая аффинная связность в аффинном пространстве A_n задается с помощью форм связности $\tilde{\omega}_J^I$ (2), которые определены с помощью тензора связности Π_{JK}^I, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (4). Формы связности $\tilde{\omega}_J^I$ удовлетворяют структурным уравнениям (6), в которые входят компоненты тензора кривизны R_{JKL}^I неканонической аффинной связности, выражающиеся по формулам (7). Внося формы связности $\tilde{\omega}_J^I$ в структурные уравнения (1_1) для базисных форм, мы получаем тензор кручения S_{JK}^I неканонической аффинной связности, компоненты которого входят в структурные уравнения (9).*

2. Рассмотрим m-мерную поверхность X_m:

$$\omega^a = \Lambda_i^a \omega^i , \ \Delta\Lambda_i^a - \Lambda_i^b \Lambda_j^a \omega_b^j + \omega_i^a = \Lambda_{ij}^a \omega^j \ \ (\Lambda_{[ij]}^a = 0) . \qquad (10)$$

Поместим векторы $\bar{e}_i$ репера $R = \{A, \bar{e}_i, \bar{e}_a\}$ в касательную плоскость T_m. Тогда $\Lambda_i^a = 0$, а уравнения (10) перепишутся в виде

$$\omega^a = 0,\ \theta_i^a = \Lambda_{ij}^a \omega^j\ \left(\theta = \omega\big|_{\omega^a = 0}\right), \tag{11}$$

причем

$$\Delta\Lambda_{ij}^a \equiv \partial\Lambda_{ij}^a + \Lambda_{ij}^b\theta_b^a - \Lambda_{kj}^a\theta_i^k - \Lambda_{ik}^a\theta_j^k = \Lambda_{ijk}^a\omega^k,\ \Lambda_{i[jk]}^a = 0\,. \tag{12}$$

Внешние дифференциалы базисных форм ω^i и вторичных форм θ_j^i, θ_a^i, θ_b^a имеют вид

$$\begin{gathered} d\omega^i = \omega^j \wedge \theta_j^i,\ d\theta_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \omega^k \wedge \Lambda_{jk}^a\theta_a^i, \\ d\theta_b^a = \theta_b^c \wedge \theta_c^a - \omega^i \wedge \Lambda_{ji}^a\theta_b^j,\ d\theta_a^i = \theta_a^j \wedge \theta_j^i + \theta_a^b \wedge \theta_b^i. \end{gathered} \tag{13}$$

Утверждение 3. *Над поверхностью X_m имеется главное расслоение $G(X_m)$ со структурными уравнениями (13), типовым слоем которого является подгруппа стационарности m-мерной касательной плоскости T_m.*

В расслоении $G(X_m)$ зададим фундаментально-групповую связность с помощью новых форм:

$$\tilde{\theta}_j^i = \theta_j^i - \Gamma_{jk}^i\omega^k,\ \ \tilde{\theta}_b^a = \theta_b^a - \Gamma_{bi}^a\omega^i,\ \ \tilde{\theta}_a^i = \theta_a^i - \Gamma_{aj}^i\omega^j, \tag{14}$$

причем компоненты объекта связности $\Gamma = \{\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{aj}^i, \Gamma_{bi}^a\}$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$\Delta\Gamma_{jk}^i + \Lambda_{jk}^a\theta_a^i = \Gamma_{jkl}^i\omega^l,\ \ \Delta\Gamma_{bi}^a - \Lambda_{ki}^a\theta_b^k = \Gamma_{bij}^a\omega^j,$$

$$\Delta\Gamma_{aj}^i - \Gamma_{kj}^i\theta_a^k + \Gamma_{aj}^b\theta_b^i = \Gamma_{ajk}^i\omega^k\ .$$

Структурные уравнения форм связности (14) имеют вид

$$d\tilde{\theta}_j^i = \tilde{\theta}_j^k \wedge \tilde{\theta}_k^i + K_{jkl}^i\omega^k \wedge \omega^l,\ d\tilde{\theta}_b^a = \tilde{\theta}_b^c \wedge \tilde{\theta}_c^a + K_{bij}^a\omega^i \wedge \omega^j,$$

$$d\widetilde{\theta}_a^i = \widetilde{\theta}_a^j \wedge \widetilde{\theta}_j^i + \widetilde{\theta}_a^b \wedge \widetilde{\theta}_b^i + K_{ajk}^i \omega^j \wedge \omega^k ,$$

где компоненты кривизны $K = \{K_{jkl}^i, K_{bij}^a, K_{ajk}^i\}$ выражаются по формулам

$$K_{jkl}^i = \Gamma_{j[kl]}^i - \Gamma_{j[k}^m \Gamma_{ml]}^i, \; K_{bij}^a = \Gamma_{b[ij]}^a - \Gamma_{b[i}^c \Gamma_{cj]}^a,$$

$$K_{ajk}^i = \Gamma_{a[jk]}^i - \Gamma_{a[j}^l \Gamma_{lk]}^i - \Gamma_{a[j}^b \Gamma_{bk]}^i .$$

3. Представим дифференциальные уравнения (4) компонент объекта аффинной связности Π в подробном виде, соответствующем компонентам объекта связности Γ и объекту Λ_{ij}^a :

$$d\Pi_{jk}^i - \Pi_{lk}^i \omega_j^l - \Pi_{ak}^i \omega_j^a - \Pi_{jl}^i \omega_k^l - \Pi_{ja}^i \omega_k^a +$$
$$+ \Pi_{jk}^l \omega_l^i + \Pi_{jk}^a \omega_a^i = \Pi_{jkl}^i \omega^l + \Pi_{jka}^i \omega^a ,$$

$$d\Pi_{bj}^a - \Pi_{li}^a \omega_b^l - \Pi_{ci}^a \omega_b^c - \Pi_{bl}^a \omega_i^l - \Pi_{bc}^a \omega_i^c +$$
$$+ \Pi_{bi}^j \omega_j^a + \Pi_{bi}^c \omega_c^a = \Pi_{bij}^a \omega^j + \Pi_{bic}^a \omega^c ,$$

$$d\Pi_{ai}^i - \Pi_{kj}^i \omega_a^k - \Pi_{bj}^i \omega_a^b - \Pi_{al}^i \omega_j^l - \Pi_{ab}^i \omega_j^b +$$
$$+ \Pi_{aj}^l \omega_l^i + \Pi_{aj}^b \omega_b^i = \Pi_{ajk}^i \omega^k + \Pi_{ajb}^i \omega^b ,$$

$$d\Pi_{ij}^a - \Pi_{ik}^a \omega_j^k - \Pi_{ib}^a \omega_j^b - \Pi_{kj}^a \omega_i^k - \Pi_{bj}^a \omega_i^b +$$
$$+ \Pi_{ij}^k \omega_k^a + \Pi_{ij}^b \omega_b^a = \Pi_{ijk}^a \omega^k + \Pi_{ijb}^a \omega^b .$$

Воспользуемся уравнениями (11) поверхности X_m :

$$\begin{aligned}
&\Delta\Pi_{jk}^i + \Pi_{jk}^a \theta_a^i = (\Pi_{jkl}^i + \Pi_{ak}^i \Lambda_{jl}^a + \Pi_{ja}^i \Lambda_{kl}^a)\omega^l ,\\
&\Delta\Pi_{bi}^a - \Pi_{ci}^a \theta_b^c = (\Pi_{bij}^a + \Pi_{bc}^a \Lambda_{ij}^c - \Pi_{bi}^k \Lambda_{kj}^a)\omega^j ,\\
&\Delta\Pi_{aj}^i + \Pi_{aj}^b \theta_b^i - \Pi_{kj}^i \theta_a^k = (\Pi_{ajk}^i + \Pi_{ab}^i \Lambda_{jk}^b)\omega^k ,\\
&\Delta\Pi_{ij}^a = (\Pi_{ijk}^a - \Pi_{ij}^l \Lambda_{lk}^a + \Pi_{ib}^a \Lambda_{jk}^b + \Pi_{bj}^a \Lambda_{ik}^b)\omega^k .
\end{aligned} \tag{15}$$

Введем обозначения для преобразованных пфаффовых производных, стоящих в правых частях уравнений (15):

$$\tilde{\Pi}^{i}_{jkl} = \Pi^{i}_{jkl} + \Pi^{i}_{ak}\Lambda^{a}_{jl} + \Pi^{i}_{ja}\Lambda^{a}_{kl}\,,\ \tilde{\Pi}^{a}_{bij} = \Pi^{a}_{bij} + \Pi^{a}_{bc}\Lambda^{c}_{ij} - \Pi^{k}_{bi}\Lambda^{a}_{kj}\,,$$

$$\tilde{\Pi}^{i}_{ajk} = \Pi^{i}_{ajk} + \Pi^{i}_{ab}\Lambda^{b}_{jk}\,,\ \tilde{\Pi}^{a}_{ijk} = \Pi^{a}_{ijk} - \Pi^{l}_{ij}\Lambda^{a}_{lk} + \Pi^{a}_{ib}\Lambda^{b}_{jk} + \Pi^{a}_{bj}\Lambda^{b}_{ik}\,.$$

Сопоставляя дифференциальные уравнения (15_4) и (12_1), положим

$$\Pi^{a}_{ij} = \Lambda^{a}_{ij}\,. \tag{16}$$

При этом из тождеств $\Lambda^{a}_{i[jk]} = 0$ следует

$$\tilde{\Pi}^{a}_{i[jk]} = \Pi^{a}_{i[jk]} - \Pi^{l}_{i[j}\Lambda^{a}_{lk]} + \Pi^{a}_{ib}\Lambda^{b}_{[jk]} + \Pi^{a}_{b[j}\Lambda^{b}_{ik]} = 0\,.$$

Учитывая симметричность функций Λ^{a}_{ij} по нижним индексам, получим

$$\Pi^{a}_{i[jk]} - \Pi^{l}_{i[j}\Lambda^{a}_{lk]} + \Pi^{a}_{b[j}\Lambda^{b}_{ik]} = 0\,. \tag{17}$$

Теорема 1. *Если в аффинном пространстве A_n задана поверхность X_m, то объект аффинной связности Π, содержащий два простейших подобъекта — объект касательной аффинной связности $\{\Pi^{i}_{jk}\}$ и объект нормальной линейной связности $\{\Pi^{a}_{bi}\}$ — редуцируется к объекту фундаментально-групповой связности Г, задающему связность в главном расслоении $G(X_m)$, ассоциированном с поверхностью X_m.*

Запишем подробнее формулы для компонент R^{a}_{ijk} объекта аффинной кривизны *R*:

$$R^{a}_{ijk} = \Pi^{a}_{i[jk]} - \Pi^{l}_{i[j}\Pi^{a}_{lk]} + \Pi^{a}_{b[j}\Pi^{b}_{ik]}\,,$$

найдем дифференциальные сравнения на рассматриваемые компоненты. Из сравнений (8) имеем

$$\Delta R^{a}_{ijk} + R^{l}_{ijk}\omega^{a}_{l} - R^{a}_{bjk}\omega^{b}_{i} - R^{a}_{ibk}\omega^{b}_{j} - R^{a}_{ijb}\omega^{b}_{k} \cong 0\,.$$

Учитывая уравнения поверхности X_m (11), получим

$$\Delta R^a_{ijk} \approx 0 \pmod{\omega^i}. \qquad (18)$$

При редукции аффинной кривизны R к объекту фундаментально-групповой кривизны K выполняются равенства (16, 17). В этом случае, должны выполняться условия: $R^a_{ijk} = 0$ (ср.: [2, с. 38]), которые в силу (18) являются инвариантными.

Теорема 2. *Редукция тензора аффинной кривизны R, задаваемой объектом П, к тензору кривизны K фундаментально-групповой связности, задаваемой объектом Г, возможна, если сокращенный объект аффинной связности*

$$\overline{\Pi} = \{ \Pi^i_{jk}, \Pi^a_{bi}, \Pi^i_{aj} \}$$

отождествлен с объектом связности Г и выполняются условия (16), (17).

Список литературы

1. *Картан Э.* Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань, 1962.

2. *Шевченко Ю.И.* Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве. Калининград, 2009.

K. Bashashina

Reduction of the affine curvature tensor to the curvature tensor of fundamental-group connection on the surface of affine space

In multidimensional affine space an affine connection is given by means of connection forms. It is shown that the connection is given by connection tensor, which determines its curvature and torsion tensors of non-canonical affine connection. In an affine space m-dimensional surface is given, which is considered as m-parameter family described a tangent plane. In principal bundle associated with the surface fundamental-group connection is given by Laptev — Lumiste method. Reduction of the affine curvature tensor to the curvature tensor of fundamental-group connection is made.