$$\omega_i^j\,(\omega_j + \omega_i) = 0, \qquad (25)$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Литература

I. Малаховский В.С., Конгруэнции коник, порожденные расслояемой парой C_4. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур" (Труды Калининградского ун-та), вып. I, 1970, с.5-26.

2. Малаховский В.С., О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. Данный сборник.

3. Похила М.М., Пары многообразий квадратичных элементов в n-мерном проективном пространстве (случай пары с общими гиперплоскостями). "Дифференциальная геометрия многообразий фигур" (Труды Калининградского ун-та), вып. 2, 1971, с.43-54.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 3
1973

ТЕРЕНТЬЕВА Е.И.

ИНВАРИАНТНОЕ ОСНАЩЕНИЕ $(n-2)$-МЕРНОЙ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ Γ_{n-2} ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P_n.

В работе [7] рассмотрено инвариантное оснащение $(n-2)$-мерной гиперполосы Γ_{n-2} проективного пространства P_n, при построении которого используются две вырожденные гиперповерхности V_{n-1}^{n-2} и $\tilde{V}_{n-1}^{n-2}$, ассоциированные с данной гиперполосой Γ_{n-2}.

В настоящей работе строится инвариантное оснащение регулярной гиперполосы Γ_{n-2} проективного пространства P_n с помощью ассоциированной с данной гиперполосой $(n-2)$-вырожденной гиперповерхности V_{n-1}^{n-2} [2] и связанной гиперполосы $\overset{*}{\Gamma}_{n-2}$ [4]. При исследовании применяется аналитический аппарат и терминология, введенная в работах [I]-[4].

Во всей работе используется следующая схема индексов:

$$i, j, \kappa, p, \tau, s = 2, \ldots, n-1;$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n+1; \quad \vartheta, \eta = 2, 3, \ldots, n.$$

По всем индексам, встречающимся дважды сверху и снизу, предполагагается суммирование. Символы „$/$", „$//$", „$;$" и „$\int$" вводятся для обозначения ковариантного дифференцирования относительно соответствующих связностей $\Gamma_i, \bar{\Gamma}_i, \check{\Gamma}_i$ связанных гиперполос Γ_{n-2}, $\check{\Gamma}_{n-2}$([4];[3], §4) и связности $\tilde{\Gamma}$, гиперповерхности V_{n-1}^{n-2}.

Индексы, участвующие в альтернировании отмечаются чертой снизу. Например, $2\varphi_{[ij]} = \varphi_{\underline{ij}}$.

С каждой точкой M_1^α базисной поверхности гиперполосы Γ_{n-2} связаны два репера: ковариантный – $M_1^\alpha, M_{1/i}^\alpha, X_0^\alpha, X_n^\alpha$ и контравариантный – $P_\alpha^1, T_\alpha^0, T_{\alpha/i}^0, T_\alpha^n$, причем нормаль первого рода задается точками X_n^α, X_0^α или гиперплоскостями N_α^{1K}, а нормаль второго рода точками $M_{1/i}^\alpha$ [3], §I.

Основные дифференциальные уравнения оснащенной регулярной гиперполосы $N(\Gamma_{n-2})$ имеют вид:

$$M_{1/ij}^\alpha = p_{ij} M_1^\alpha + b_{1ij}^0 X_0^\alpha + b_{1ij}^n X_n^\alpha, \tag{1}$$

$$X_{0/i}^\alpha = m_{0i}^1 M_1^\alpha + m_{0i}^{1K} M_{1/K}^\alpha + n_{0i}^n X_n^\alpha, \tag{2}$$

$$X_{n/i}^\alpha = m_{ni}^1 M_1^\alpha + m_{ni}^{1K} M_{1/K}^\alpha, \tag{3}$$

где тензоры $p_{ij}, b_{1ij}^0, b_{1ij}^n, m_{0i}^1, m_{0K}^1, n_{0i}^n, m_{ni}^1, m_{ni}^{1K}$ называются основными фундаментальными тензорами этой гиперполосы.

При изменении оснащения гиперполосы Γ_{n-2} тензоры N_α^{1K} и $M_{1/i}^\alpha$ изменяются следующим образом:

$$\bar{N}_\alpha^{1K} = N_\alpha^{1K} - \psi_0^{1K} T_\alpha^0 \; ; \; M_{1//i}^\alpha = M_{1/i}^\alpha + h_i M_1^\alpha. \tag{4}$$

Отсюда следует, что тензоры ψ_0^{1K} и h_i определяют соответственно новые нормали первого и второго рода гиперполосы Γ_{n-2}. Главный фундаметальный тензор b_{1ij}^0 гиперполосы Γ_{n-2} не изменяется при изменении оснащения, а компоненты объекта связности Γ_i преобразуются по формулам:

$$\bar{\Gamma}_{1i}^1 = \Gamma_{1i}^1 - h_i, \; \bar{\Gamma}_{0i}^0 = \Gamma_{0i}^0 + \psi_0^{1K} b_{1Ki}^0, \; \bar{\Gamma}_{ni}^n = \Gamma_{ni}^n, \tag{5}$$

$$\bar{\Gamma}_{ij}^K = \Gamma_{ij}^K + h_i \delta_j^K + h_j \delta_i^K - b_{1ij}^0 \psi_0^{1K}. \tag{6}$$

§ I. (n-2)-вырожденная гиперповерхность V_{n-1}^{n-2}, ассоциированная с данной гиперполосой.

Определение I. Гиперповерхность V_{n-1}^{n-2}, вложенная в проективное пространство P_n, называется вырожденной гиперповерхностью ранга $(n-2)$, если она состоит из ∞^{n-2} одномерных плоских образующих.

С регулярной гиперполосой Γ_{n-2} естественным образом ассоциируется $(n-2)$-вырожденная гиперповерхность V_{n-1}^{n-2}, плоскими образующими которой являются характеристики $\Pi_1\{M_1^\alpha, X_n^\alpha\}$ гиперполосы Γ_{n-2} в соответствующих точках M_1^α базисной поверхности B_{n-2}. Следовательно, имеем

$$M_{1/n}^\alpha = \psi_1 X_n^\alpha + \lambda_n M_1^\alpha. \tag{1.1}$$

Главные касательные гиперплоскости T_α^0 гиперполосы Γ_{n-2} суть касательные гиперплоскости ассоциированной гиперповерхности V_{n-1}^{n-2}. Для регулярной гиперполосы Γ_{n-2} и гиперповерхности V_{n-1}^{n-2} имеют место соотношения:

$$\tilde{\Gamma}_{1i}^1 = \Gamma_{1i}^1, \tag{1.2}$$

$$\tilde{\Gamma}_{1n}^1 = -\lambda_n, \; \tilde{\Gamma}_{0i}^0 = \Gamma_{0i}^0, \tag{1.3}$$

$$\tilde{P}_\alpha^1 = P_\alpha^1 + \psi_n^1 T_\alpha^n, \tag{1.4}$$

$$\tilde{N}_\alpha^{1n} = \psi^1 T_\alpha^n, \; \tilde{N}_\alpha^{1K} = N_\alpha^{1K}, \tag{1.5}$$

$$\tilde{b}^{0}_{1ij} = b^{0}_{1ij}. \qquad (1.6)$$

Докажем, например, справедливость соотношения (I.2). Так как для гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} выполняется условие $\tilde{P}^{1}_{\alpha} M^{\alpha}_{1/j} = 0$, то

$$\tilde{P}^{1}_{\alpha} M^{\alpha}_{1/i} = \tilde{P}^{1}_{\alpha} M^{\alpha}_{1,i} - \tilde{\Gamma}^{1}_{1i} M^{\alpha}_{1} \tilde{P}^{1}_{\alpha} = 0. \qquad (1.7)$$

С другой стороны для регулярной гиперполосы Γ_{n-2} имеем равенства:

$$\tilde{P}^{1}_{\alpha} M^{\alpha}_{1/i} = \tilde{P}^{1}_{\alpha} M^{\alpha}_{1,i} - \Gamma^{1}_{1i} M^{\alpha}_{1} \tilde{P}^{1}_{\alpha} = 0. \qquad (1.8)$$

Сравнивая (I.7) и (I.8), получаем

$$\tilde{\Gamma}^{1}_{1i} = \Gamma^{1}_{1i}.$$

В дальнейшем рассматриваем для гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} только K-оснащения [2].

В силу теоремы (2.I) работы [2] следует, что K-оснащения гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} индуцируют $(n-2)$-мерную поверхность $\check{B}_{n-2}$, принадлежащую гиперповерхности V^{n-2}_{n-1}, и соответствующую поверхности B_{n-2}. Поверхность $\check{B}_{n-2}$ определяется точками (I.T).

§2. Связанные гиперполосы Γ_{n-2} и $\check{\Gamma}_{n-2}$

О п р е д е л е н и е 2. Две проективно оснащенные гиперполосы Γ_{n-2} и $\check{\Gamma}_{n-2}$, между точками которых установлено взаимно однозначное соответствие называются связанными, если в соответствующих точках они имеют общие нормали первого и второго рода.

С данной гиперполосой Γ_{n-2} связываем гиперполосу $\check{\Gamma}_{n-2}$, базисная поверхность $\check{B}_{n-2}$ которой образована точками (I.I), а главные касательные гиперплоскости те же, что и у гиперполосы Γ_{n-2}.

Сформулируем тензорный признак связанных гиперполос Γ_{n-2} и

$\check{\Gamma}_{n-2}$, доказательство которого аналогично доказательству теоремы (2.I) работы [4]:

Т е о р е м а I. Для того, чтобы характеристические точки

$$M^{\alpha}_{1/n} = \psi_1 X^{\alpha}_{n} + \lambda_n M^{\alpha}_{1}$$

определяли базисную поверхность $\check{B}_{n-2}$ гиперполосы $\check{\Gamma}_{n-2}$, необходимо и достаточно, чтобы тензоры ψ_1 и λ_n удовлетворяли условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_{1/i} - S^{n}_{1} m^{1}_{ni} \psi_1 = 0, \\ &\lambda_{n/i} - \lambda_n S^{n}_{1} m^{1}_{ni} + \psi_1 m^{1}_{ni} = 0, \\ &|e^{k}_{i}| = |\lambda_n \delta^{k}_{i} + \psi_1 m^{1k}_{ni}| \neq 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

где

$$\check{\Gamma}^{1}_{1i} = \Gamma^{1}_{1i} + S^{n}_{1} m^{1}_{ni} \quad (\text{См. } (2.12), §2, [4]).$$

О п р е д е л е н и е 3. Нормаль второго рода гиперполосы Γ_{n-2}, индуцированную K-оснащением гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} и удовлетворяющую условиям (2.I), назовем индуцированной нормалью второго рода W_{n-3} этой гиперполосы.

Из этого определения следует, что индуцированная нормаль второго рода W_{n-3} гиперполосы Γ_{n-2} и точка $M^{\alpha}_{1/n}$ определяют нормаль второго рода $\mathcal{O}_{n-2}\{M^{\alpha}_{1/n}; M^{\alpha}_{1/n;i}\}$ гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} в данной точке M^{α}_{1}. $(n-2)$-мерную плоскость $\mathcal{O}_{n-2}$ назовем индуцированной нормалью второго рода $(n-2)$-вырожденной гиперповерхности V^{n-2}_{n-1}.

В дальнейшем исключаем из рассмотрения случай, когда $(n-2)$-вырожденная ассоциированная гиперповерхность V^{n-2}_{n-1} являются конической [2], т.е. когда тензор m^{1k}_{ni} удовлетворяет условиям:

$$m^{1k}_{ni} = b^1_n \delta^k_i \text{ , где } b^1 = -\psi^1 \lambda_n . \qquad (2.2)$$

В этом случае базисная поверхность $\check{B}_{n-2}$ гиперполосы $\check{\Gamma}_{n-2}$ вырождается в точку, а оснащение гиперполосы Γ_{n-2} есть центрально вынужденное [3].

Главные фундаментальные тензоры гиперполос Γ_{n-2} и $\check{\Gamma}_{n-2}$ связаны соотношением:

$$\check{b}^0_{1ij} = e^k_i \, b^0_{1kj} . \qquad (2.3)$$

Отсюда видно, что гиперполоса $\check{\Gamma}_{n-2}$, связанная с регулярной гиперполосой Γ_{n-2}, регулярна.

Как следует из теоремы (I), не существует гиперполосы $\check{\Gamma}_{n-2}$, связанной с данной регулярной гиперполосой Γ_{n-2}, если тензоры λ_n, ψ_1 не удовлетворяют, по крайней мере, одному из трех условий (2.I), ([4] §1).

§3. Инвариантное оснащение регулярной гиперполосы Γ_{n-2}.

Задачу построения инвариантного оснащения регулярной гиперполосы Γ_{n-2} начнем с рассмотрения полувнутреннего оснащения этой гиперполосы [6], т.е. когда чебышевский тензор $\ddot{K}_i$ гиперполосы Γ_{n-2} равен нулю.

Переход от одного полувнутреннего оснащения гиперполосы Γ_{n-2} к другому характеризуется равенством

$$h_i = \psi^{1k}_0 \, b^0_{1ki} . \qquad (3.1)$$

Из (3.I), (4) следует, что при полувнутреннем оснащении гиперполосы Γ_{n-2} каждой нормали второго рода ставится в соответствие единственная нормаль первого рода этой гиперполосы и наоборот.

Для связанных гиперполос Γ_{n-2} и $\check{\Gamma}_{n-2}$ имеют место следующие теоремы:

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы оснащение гиперполосы $\check{\Gamma}_{n-2}$ было полувнутренним, необходимо и достаточно, чтобы

$$e^k_{p/i} \tilde{\tilde{e}}^p_k = K_i \text{ , где } e^k_i \tilde{\tilde{e}}^i_s = \delta^k_s \qquad (3.2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. теоремы (2) проводится совершенно аналогично предложению (I.4) работы [4].

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы оснащения связанных гиперполос Γ_{n-2} и $\check{\Gamma}_{n-2}$ были полувнутренними, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$e^k_{p/i} \tilde{\tilde{e}}^p_k = -\psi^{1k}_0 \, b^0_{1ki} + h_i . \qquad (3.3)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. <u>Необходимость</u>. При изменении оснащения гиперполосы Γ_{n-2} чебышевский тензор K_i этой гиперполосы меняется по формуле:

$$\bar{K}_i = K_i + \psi^{1k}_0 \, b^0_{1ki} - h_i . \qquad (3.4)$$

Так как новое оснащение гиперполосы Γ_{n-2} полувнутреннее, следовательно, из (3.4) имеем:

$$K_i = h_i - \psi^{1k}_0 \, b^0_{1ki} \qquad (3.5)$$

С другой стороны, при полувнутреннем оснащении гиперполосы тензор K_i, в силу теоремы (2), имеет строение (3.2). Сравнивая соотношения (3.2) и (3.5), получаем (3.3).

<u>Достаточность</u>. Пусть выполняются условия (3.3). Тогда для гиперполосы $\check{\Gamma}_{n-2}$ тензор $K_i = e^k_{p/i} \tilde{\tilde{e}}^p_k$. То есть в силу теоремы (2) оснащение гиперполосы $\check{\Gamma}_{n-2}$ полувнутреннее. Из соотношения (3.3) и теоремы (2) для гиперполосы Γ_{n-2} получаем, что тензор $K_i = h_i - \psi^{1k}_0 \, b^0_{1ki}$. Значит оснащение гиперполосы Γ_{n-2} полу-

внутреннее. Теорема доказана.

Перейдем к построению инвариантного оснащения гиперполосы Γ_{n-2}. При полувнутреннем оснащении нормаль второго рода W_{n-3} гиперполосы Γ_{n-2} инварианта в силу условий (2.1), следовательно, ей соответствует единственная инвариантная нормаль первого рода W_2 этой гиперполосы, определяемая тензором:

$$\psi^{1r}_{i} = -e^{\kappa}_{p/i} \bar{e}^{p}_{\kappa} b^{1ir}_{0}, \text{ где } b^{0}_{1is} b^{1rs}_{0} = \delta^{r}_{i}. \qquad (3.6)$$

Поставим следующую задачу: выделить в инвариантной нормали первого рода W_2 регулярной гиперполосы Γ_{n-2} прямую $\mathfrak{a}_1$, внутренним образом связанную с данной гиперполосой.

При построении инвариантного оснащения $\{W_2, W_{n-3}\}$ гиперполосы Γ_{n-2} мы рассматривали только κ-оснащения ассоциированной $(n-2)$-вырожденной гиперповерхности V^{n-2}_{n-1}, т.е.

$$K_{n} = 0. \qquad (3.7)$$

Из соотношения (1.6) и строения чебышевских тензоров гиперполосы Γ_{n-2} и гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} вытекает, что

$$\tilde{K}_i - K_i = 0. \qquad (3.8)$$

Условия (3.7) и (3.8) характеризуют полувнутреннее Δ-оснащение $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_{n-2}\}$ гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} [2]. Далее требуем, чтобы для этого полувнутреннего Δ-оснащения $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_{n-2}\}$ гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} выполнялись соотношения:

$$Q^{1}_{on} = 0, \quad \gamma^{1}_{o\eta} = 0,$$

$$|m_{ij}| \neq 0, \quad |\ell_{nn}| \neq 0. \qquad (3.9)$$

причем строение тензоров Q^{1}_{on}, $\gamma^{1}_{o\eta}$, m_{ij}, ℓ_{nn} такое же как и строение соответствующих тензоров Q_{os_2}, γ^{1}_{os}, $m_{s_1 r_1}$, $\ell_{s_2 r_2}$ в работах [2], [5].

Условия (3.9) определяют инвариантную прямую $\mathfrak{a}_1$ в инвариантной нормали первого рода W_2 гиперполосы Γ_{n-2}, являющейся внутренней нормалью первого рода $\mathfrak{a}_1$ гиперповерхности V^{n-2}_{n-1}.

Таким образом, получаем следующую геометрическую характеристику инвариантного оснащения регулярной $(n-2)$-мерной гиперполосы Γ_{n-2}: инвариантная нормаль второго рода W_{n-3} регулярной гиперполосы Γ_{n-2} является пересечением касательных плоскостей T_{n-2} и $\check{T}_{n-2}$ в соответствующих точках базисных поверхностей B_{n-2} и $\check{B}_{n-2}$ гиперполос Γ_{n-2} и $\check{\Gamma}_{n-2}$. Инвариантная нормаль первого рода W_2 гиперполосы Γ_{n-2} есть прямая сумма образующей Π_1 (характеристики гиперполосы Γ_{n-2}) гиперповерхности V^{n-2}_{n-1} и её инвариантной нормали первого рода $\mathfrak{a}_1$.

Литература.

1. Атанасян Л.С., К теории оснащенных поверхностей многомерного проективного пространства. (Уч.зап.МГПИ им.ЛЕНИНА), т.168, 1957, вып.2, с.3-44.

2. Атанасян Л.С. и Зоронцов Н.С., Построение инвариантного оснащения τ-вырожденной гиперповерхности многомерного проективного пространства. (Уч.зап.МГПИ им.ЛЕНИНА), т.243, 1965, с.5-28.

3. Попов Ю.И., К теории оснащенной гиперполосы в многомерном проективном пространстве. (Уч.зап.МГПИ им.ЛЕНИНА), т.I, №374, 1970, с.102-117.

4. Попов Ю.И., Гиперполосы многомерного проективного пространства с общим оснащением. (Уч.зап.МГПИ им.ЛЕНИНА), т.I, №374, 1970, с.118-129.

5. Попов Ю.И., Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур" (Труды Калининградского ун-та), вып.I, 1970, с.27-47

6. Попов Ю.И., Введение инвариантного оснащения на регулярной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства, (Уч. зап. МГЗПИ), вып. 30, 1971, с. 286-296.

7. Васильян М.А., Об инвариантном оснащении гиперполосы Γ_{n-2}. (Доклады Академии Наук АССР), т. 40, №2, 1970.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 3 1973

ТКАЧ Г.П.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ АФФИННО РАССЛОЯЕМЫХ ПАР КОНГРУЭНЦИЙ ФИГУР В ТРЕХМЕРНОМ ЭКВИАФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

По аналогии с расслоением пар конгруэнций фигур в проективном [1] и центроаффинном [2] пространствах вводится понятие односторонне аффинно расслояемых и расслояемых пар конгруэнций фигур в эквиаффинном пространстве A_3.

§1. Канонический репер пары T.

В трехмерном эквиаффинном пространстве расоматриваются пары T конгруэнций фигур F_1 и F_2, где F_1 -парабола, а $F_2 \equiv B$ - точка, не инцидентная плоскости параболы. Из рассмотрения исключается случай, когда касательная плоскость α_B к поверхности (B) касается параболы F_1 или параллельна плоскости параболы. Обозначим буквами m -линию пересечения плоскости α_B с плоскостью параболы, ℓ' -касательную к параболе, параллельную прямой m, A -точку касания прямой ℓ' с параболой, M_0 -точку пересечения прямой m диаметра параболы, проходящего через A, ℓ -прямую BM_0.