УДК 514.76

М.В. Маштакова, В.И. Паньженский

(Пензенский государственный педагогический университет)

ДВИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ (α,β)-МЕТРИКОЙ*

Финслеровы пространства, фундаментальная функция которых определена римановой метрикой α и дифференциальной формой β, впервые были введены Рандерсом [1] с целью их применения в исследовании электромагнитного и гравитационного полей. В работе [2] Кропиной изучалась другая финслерова (α,β)-метрика, нашедшая затем применение в теории динамических систем.

В настоящей работе исследуется обобщенное лагранжево пространство L^n с (α,β)-метрикой вида:

$$g_{ij}(x,y)=\left(b_s y^s\right)^{2c} a_{ij}(x), \qquad (1)$$

где $a_{ij}(x)$ – компоненты риманова метрического тензора (α-метрика), $b_i(x)$– компоненты дифференциальной линейной формы β, c=const. Получены уравнения движений пространств L^n и их дифференциальные следствия. Установлено, что группа движений G^r пространства L^n является группой Ли размерности $r \le n(n+1)/2$. Найдены двумерные пространства, допускающие группы движений.

1. Пусть M – n-мерное дифференцируемое многообразие, $TM = \bigcup\limits_{x\in M} T_x M$ – касательное расслоение над M, $\pi : TM \to M$ – каноническая проекция. Если $x \to (x^i)$ – локальные координаты в $U \subset M$, то в $\pi^{-1}(U) \subset TM$ возникают естественные локальные координаты $(x,y) \to (x^i, y^i)$, где (x^i) – базисные координаты точки $x \in U$, а (y^i) – слоевые координаты вектора $y \in T_x M$ относительно натурального базиса $\{\partial_i\}$.

Многообразие M называется лагранжевым пространством L^n, если в его касательном расслоении задана скалярная функция $L(x,y)$– лагранжиан, удовлетворяющая условию невырожденности: $\det\left\|L_{\cdot i \cdot j}\right\| \ne 0$, где $L_{\cdot i} = \partial L / \partial y^i$. Если, в частности, L – функция однородная второй степени по y: $L(x,\lambda y) = \lambda^2 L(x,y)$, то лагранжево пространство является финслеровым пространством F^n [3]. Функции $f_{ij} = L_{\cdot i \cdot j}$ являются компонентами тензора финслерова типа, который называется метрическим тензором пространства L^n.

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Если на многообразии M задано симметрическое невырожденное тензорное поле финслерова типа $g = g_{ij}(x, y)dx^i \otimes dx^j$, то имеем обобщенное лагранжево пространство L^n. Если существует функция L на TM, такая что $L_{\cdot i \cdot j} = g_{ij}$, то обобщенное лагранжево пространство становится лагранжевым. К обобщенному лагранжеву пространству L^n можно присоединить ассоциированное лагранжево пространство с лагранжианом $L = \frac{1}{2} g_{ij} y^i y^j$. Для метрики (1) этот лагранжиан имеет вид:

$$L = \frac{1}{2}\left(b_s y^s\right)^{2c} a_{ij}(x) y^i y^j. \tag{2}$$

2. Диффеоморфизм $\varphi : M \to M$ называется движением пространства L^n, если он сохраняет поле метрического тензора g. Для того чтобы однопараметрическая группа преобразований

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i(x)t,$$

порождаемая векторным полем $\xi = \xi^i(x)\partial_i$, была группой движений в пространстве L^n, необходимо и достаточно, чтобы производная Ли от метрического тензора g в направлении векторного поля ξ была равна нулю $\mathrm{L}_\xi g=0$. Эти уравнения называются уравнениями движений пространства L^n, и для метрики (1) они имеют вид:

$$\xi^k \partial_k a_{ij} + \partial_i \xi^k a_{jk} + \partial_j \xi^k a_{ik} + \frac{2c}{b_s y^s} y^l \left(\xi^k \partial_k b_l + \partial_l \xi^k b_k\right) a_{ij} = 0. \tag{3}$$

Дифференцируя (3) по y^i, а затем по y^j, получим дифференциальные следствия

$$-b_i\left(\xi^k \partial_k b_j + \partial_j \xi^k b_k\right) + b_j\left(\xi^k \partial_k b_i + \partial_i \xi^k b_k\right) = 0. \tag{4}$$

Любое движение обобщенно лагранжева пространства L^n будет являться движением и ассоциированного лагранжева пространства L^n, так как

$$\mathrm{L}_\xi L = \mathrm{L}_\xi\left(g_{ij} y^i y^j\right) = (\mathrm{L}_\xi g_{ij})\, y^i y^j = 0.$$

Лагранжиан (2) является однородным степени $2c+2$ по y. Тогда функция $F = L^{\frac{1}{c+1}}$ ($c \neq -1$) является однородной степени 2 и невырожденной: $\det\left\| F_{\cdot i \cdot j} \right\| \neq 0$, следовательно, может служить фундаментальной функцией финслерова пространства F^n, присоединенного к ассоциированному лагранжеву пространству L^n. Если $\mathrm{L}_\xi L=0$, то $\mathrm{L}_\xi F=0$. Следовательно, любое движение пространства L^n является движением пространства L^n и движением пространства F^n. Поэтому если группа G^r – группа движений пространства L^n, то она является и группой движений присоединенного финслерова пространства F^n, а значит, является группой Ли размерности $r \leq n(n+1)/2$ [4].

3. Поставим задачу классификации двумерных пространств с метрикой (1) по группам движений. Зная представления групп G^r ($r \leq 3$), действующих на

двумерном многообразии, и учитывая, что группа движений G^r пространства L^n не содержит одномерных подгрупп, действующих по общим траекториям [5], мы, интегрируя уравнения движений (3), находим компоненты метрического тензора пространства, для которого данная группа является группой движений.

Опуская выкладки, приведем компоненты метрических тензоров пространств, допускающих группы движений, и операторы соответствующих групп:

a) $G^1: X_1 = p_1$ ($p_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$); $g_{ij} = \left(y^1 + b(x^2)y^2\right)^{2c} a_{ij}(x^2)$, $\det\|a_{ij}\| \neq 0$.

b) G^2: $X_1 = p_1$, $X_2 = p_2$; $g_{ij} = \left(y^1 + by^2\right)^{2c} a_{ij}$, $b, a_{ij} = const$, $\det\|a_{ij}\| \neq 0$.

c) G^2: $X_1 = p_1$, $X_2 = x^1 p_1 + p_2$: $g_{11} = c_{11}\left(y^1 + be^{x^2} y^2\right)^{2c} e^{-2(c+1)x^2}$;

$g_{12} = c_{12}\left(y^1 + be^{x^2} y^2\right)^{2c} e^{-(2c+1)x^2}$, $g_{22} = c_{22}\left(y^1 + be^{x^2} y^2\right)^{2c} e^{-2cx^2}$, $b, c_{ij} = const$, $\det\|c_{ij}\| \neq 0$.

d) G^3: $X_1 = p_1$, $X_2 = p_2$, $X_3 = x^1 p_1 + qx^2 p_2$ ($q \neq 0$); если q=1, то $g_{ij} = \left(y^1 + by^2\right)^{-2} a_{ij}$, где $b, a_{ij} = const$, $\det\|a_{ij}\| \neq 0$; если $q \neq 1$, то $g_{12} = \left(y^1\right)^{-(1+q)} a_{12}$, $g_{11} = g_{22} = 0$, где $a_{12} \neq 0$.

Список литературы

1. *Randers G.* On an asymmetrical metric in the four-space of general relativity. Phys. Rev. 1941. P. 195 – 199.

2. *Кропина В.К.* О проективном финслеровом пространстве с определенной специальной формой. // Науч. докл. Высш. шк. 1959. №2. С. 38 – 42.

3. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., 1981.

4. *Knebelman M.S.* American Journal of Math. 1929. №51. (In this paper Finsler spaces are called general metric spaces).

5. *Паньженский В.И.* О группах изометрий метрических пространств линейных элементов / Пенз. гос. пед. ин-т. Пенза, 1981. Деп. в ВИНИТИ АН СССР 29.04.81.

M. Mashtakova, V. Panzhenskiy

MOTIONS IN SPACES WITH SPECIAL (α,β)-METRIC

This paper is devoted to the generalized Lagrange space with (α,β)-metric of the form

$$g_{ij}(x, y) = \left(b_s y^s\right)^{2c} a_{ij}(x)$$

research, where $a_{ij}(x)$ are the components of Riemannian metric tensor (α-metric) and $b_i(x)$ are the components of the differential form β, c=const. Equalizations of motions in the space L^n and differential implication are obtained. It is stated that the group of motions G^r in the space L^n is a Lie group of the dimension $r \leq n(n+1)/2$. Two-dimension spaces admitting groups of motions are found.