УДК 514.75

Т. Ю. Максакова

*(Балтийский военно-морской институт им. Ф. Ф. Ушакова,
г. Калининград)*

ДВОЙСТВЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ WH -РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Выясняются аналитические и геометрические признаки вырождения (совпадения) различных подгрупп нормальных связностей WH -распределения [1 — 3] в одну связность.

Схема использования индексов такова:

$$\mathrm{p,q,t}=\overline{1,\mathrm{r}};\ i,j=\overline{r+1,m};\ \alpha,\beta=\overline{m+1,n-1};\ \hat\beta=\overline{m+1,n};$$
$$u,v,w=\overline{r+1,n-1};\hat{\mathrm{u}},\hat{\mathrm{v}}=\overline{\mathrm{r}+1,\mathrm{n}};\ \hat A=(\overline{1,r};\overline{m+1,n});\ \mathrm{K,L}=\overline{1,\mathrm{n}};$$
$$\overline{J},\overline{K}=\overline{o,n};\ \ \varepsilon=\overline{0,11};\ \ \delta=\overline{0,1};\ \ x=\overline{1,3};\ \ s=m-r.$$

Теоремы, двойственные исходным, обозначаем символом (*), а геометрические объекты, функции, формы двойственного $\overline{\mathrm{WH}}$-распределения [2] — черточкой сверху.

1. Известно [1 — 3], что относительно репера 1-го порядка $\mathrm{R}^1=\{\mathrm{A}_{\overline{\mathrm{J}}}\}$ WH -распределение задается уравнениями (без соответствующих замыканий):

$$\omega_i^n=\Lambda_{i\hat\beta}^n\omega_0^{\hat\beta},\ \omega_\alpha^n=\Lambda_{\alpha\hat\beta}^n\omega_0^{\hat\beta},\ \omega_i^\alpha=\Lambda_{i\hat\beta}^\alpha\omega_0^{\hat\beta},$$
$$\omega_p^n=\Lambda_{p\hat A}^n\omega_0^{\hat A},\ \omega_i^p=\Lambda_{i\hat A}^p\omega_0^{\hat A},\ \omega_p^\alpha=\Lambda_{p\hat A}^\alpha\omega_0^{\hat A},$$
$$\omega_\alpha^p=\Lambda_{\alpha\hat A}^p\omega_0^{\hat A},\ \omega_p^i=\Lambda_{pK}^i\omega_0^K,\ \omega_\alpha^i=\Lambda_{\alpha K}^i\omega_0^K.$$

Пусть WH -распределение оснащено в смысле Нордена — Картана и Нордена — Бортолотти [4]. Выберем другой точечный проективный репер $\{B_{\bar{J}}\}$, адаптированный нормализации $\{\nu_{\mathrm{n}}^{\mathrm{p}}, \nu_{\mathrm{p}}^{0}\}$ базисного Λ-подрасслоения:

$$B_0 = A_0,\ \mathrm{B}_{\mathrm{p}} = A_p + \nu_p^0 A_0,\ \mathrm{B}_{\upsilon} = A_{\upsilon},\ \mathrm{B}_{\mathrm{n}} = A_n + \nu_n^p A_p + \Lambda_n^{\upsilon} A_{\upsilon},$$

где

$$\nabla \nu_n^p + \omega_n^p = \nu_{nK}^p \omega_0^K,\ \ \nabla \nu_{\mathrm{p}}^0 + \omega_p^0 = \nu_{pK}^0 \omega_o^K,\ \ \nabla \Lambda_{\mathrm{n}}^v + \omega_n^v = \Lambda_{nK}^v \omega_0^K.$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений нового репера $\{\mathrm{B}_{\bar{\mathrm{J}}}\}$ имеют следующий вид: $dB_{\bar{J}} = \Omega_{\bar{J}}^{\bar{K}} B_{\bar{K}}$.

Система форм

$$\theta_{\hat{u}}^0 = \Omega_{\hat{u}}^0 + \Gamma_{\hat{u}K}^0 \omega_0^K,\ \ \theta_{\hat{\mathrm{u}}}^{\hat{v}} = \Omega_{\hat{u}}^{\hat{v}} - \delta_{\hat{u}}^{\hat{v}} \Omega_0^0 + \Gamma_{\hat{u}K}^{\hat{v}} \Omega_0^K$$

определяет нормальную центропроективную связность 1-го рода $\nabla^{\perp}$ [3; 5] в расслоении нормалей 1-го рода базисного Λ-подрасслоения, если охваты компонент объекта связности $\{\Gamma_{\hat{\mathrm{u}}\mathrm{K}}^0, \Gamma_{\hat{\mathrm{u}}\mathrm{K}}^{\hat{\mathrm{v}}}\}$ имеют следующий вид:

$$\Gamma_{vp}^0 = \Gamma_{up}^v = \Gamma_{np}^v = \Gamma_{nn}^v = \Gamma_{up}^n = 0, \Gamma_{un}^0 = \Gamma_{nu}^0 = x_n^0 \Lambda_u^0, \Gamma_{nn}^0 = (x_n^0)^2,$$

$$\Gamma_{nn}^n = 2x_n^0,\ \Gamma_{un}^v = \Gamma_{nu}^v = \delta_u^v x_n^0,\ \Gamma_{uw}^v = \delta_u^v \Lambda_w^0 + \delta_w^v \Lambda_u^0,$$

$$\Gamma_{nu}^n = \Gamma_{un}^n = \Lambda_u^0,\ \Gamma_{uv}^0 = \Lambda_u^0 \Lambda_v^0 + \Gamma_{uv}^n x_n^0,\ \Gamma_{np}^0 = \Gamma_{np}^n x_n^0,$$

где

$$x_n^0 \overset{def}{=} \nu_n^0 - \Lambda_n^v \Lambda_v^0,\ \ \nu_{\mathrm{n}}^0 = -\frac{1}{r}(\nu_{np}^p - \Lambda_{pq}^n \nu_n^p \nu_n^q).$$

В качестве тензоров Γ_{np}^n, Γ_{uv}^n можно взять любой из следующих охватов:

$$\overset{0}{\Gamma}{}_{uv}^{n} = 0,\ \ \overset{1}{\Gamma}{}_{uv}^{n} = V_{uv}^n,\ \ [\mathrm{V}_{\mathrm{uv}}^{\mathrm{n}}] = \begin{bmatrix} V_{ij}^n & \Lambda_{i\beta}^n \\ 0 & \Lambda_{\alpha\beta}^n \end{bmatrix}, \tag{1}$$

————————————————————

$$\overset{0}{\Gamma}{}_{np}^{n} = 0,\ \ \overset{1}{\Gamma}{}_{np}^{n} = \frac{1}{2}(\Lambda_{pn}^n + \lambda_p^0 + \Lambda_{p\alpha}^n \Lambda_n^\alpha) + b_{pq}^n \nu_n^q,$$

$$\overset{2}{\Gamma}{}^{n}_{np} = \frac{1}{2}(\Lambda^{n}_{pn} + V^{0}_{p} + \Lambda^{n}_{p\alpha}\Lambda^{\alpha}_{n}) + b^{n}_{pq}\nu^{q}_{n},$$

$$\overset{3}{\Gamma}{}^{n}_{np} = \frac{1}{2}(\Lambda^{n}_{pn} + h^{0}_{p} + \Lambda^{n}_{p\alpha}\Lambda^{\alpha}_{n}) + b^{n}_{pq}\nu^{q}_{n}, \qquad (2)$$

$$\overset{4}{\Gamma}{}^{n}_{np} = \Lambda^{n}_{np} + \nu^{0}_{p} + \Lambda^{n}_{pq}\nu^{q}_{n} + \Lambda^{n}_{p\alpha}\nu^{\alpha}_{n},$$

$$\overset{5}{\Gamma}{}^{n}_{np} = b^{0}_{p} - \nu^{0}_{p} + b^{n}_{pq}\nu^{q}_{n}, \quad \overset{6}{\Gamma}{}^{n}_{np} = \lambda^{0}_{p} - \nu^{0}_{p} + \Lambda^{n}_{qp}\nu^{q}_{n},$$

$$\overset{7}{\Gamma}{}^{n}_{np} = V^{0}_{p} - \nu^{0}_{p} + \Lambda^{n}_{qp}\nu^{q}_{n}, \quad \overset{8}{\Gamma}{}^{n}_{np} = h^{0}_{p} - \nu^{0}_{p} + b^{n}_{pq}\nu^{q}_{n}, \qquad (3)$$

$$\overset{9}{\Gamma}{}^{n}_{np} = C^{0}_{p} + 3B^{0}_{p} - 4\nu^{0}_{p} + 2\Lambda^{n}_{qp}\nu^{q}_{np}, \quad \overset{10}{\Gamma}{}^{n}_{np} = C^{0}_{p} - \nu^{0}_{p} - \Lambda^{n}_{pq}\nu^{q}_{n}, \qquad (4)$$

$$\overset{10}{\Gamma}{}^{n}_{np} = \Lambda^{n}_{pq}T^{q}_{n}, \quad \Lambda^{n}_{[pq]} = 0. \qquad (5)$$

Рассматривая попарные комбинации охватов (1) тензора $\Gamma^{n}_{u\nu}$ с охватами (2) — (5) тензора Γ^{n}_{np}, получим 24 нормальные связности $\overset{\delta\varepsilon}{\nabla}{}^{\perp}(\delta = \overline{0,1};\ \varepsilon = \overline{0,11})$, индуцируемые в расслоении нормалей 1-го рода базисного Λ-подрасслоения.

Известно [2], что $\overline{\mathcal{WH}}$ – распределение есть двойственный образ WH -распределения, а оснащенное WH -распределение в смысле Нордена — Бортолотти является двойственным образом оснащенного WH -распределения в смысле Нордена — Картана [4]. Резюмируя, приходим к двойственным друг другу теоремам.

Теоремы 1 (1*). *На оснащенном в смысле Нордена — Картана (Нордена — Бортолотти) Λ-подрасслоении данного WH -распределения в расслоении его нормалей 1-го рода (2-го рода) индуцируются двадцать четыре нормальные связности* $\overset{\delta\varepsilon}{\nabla}{}^{\perp}[\overset{\delta\varepsilon}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}]$, *причем для Λ-подрасслоения с полем* *симметрического тензора* Λ^n_{np} *связности* $\overset{\delta 5}{\nabla}{}^{\perp}$ *и* $\overset{\delta 6}{\nabla}{}^{\perp}[\overset{\delta 5}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ и $\overset{\delta 6}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}]$ *совпадают.*

2. Выясним некоторые условия вырождения (совпадения) подгрупп нормальных связностей Λ-подрасслоения в одну связность. Условием совпадения нормальных связностей $\overset{\delta e}{\nabla}{}^{\perp}(e=\overline{1,11})$ и $\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}$ является обращение в нуль тензора $\overset{e}{\Gamma}{}^{n}_{np}(2)-(5)$.

$$\overset{\delta 1}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\Lambda^n_{pn}+\lambda^0_p+\Lambda^n_{p\alpha}\Lambda^\alpha_n)+b^n_{pq}\nu^q_n=0, \tag{6}$$

$$\overset{\delta 2}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\Lambda^n_{pn}+V^o_p+\Lambda^n_{p\alpha}\Lambda^\alpha_n)+b^n_{pq}\nu^q_n=0, \tag{7}$$

$$\overset{\delta 3}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\Lambda^n_{pn}+h^0_p+\Lambda^n_{p\alpha}\Lambda^\alpha_n)+b^n_{pq}\nu^q_n=0, \tag{8}$$

$$\overset{\delta 4}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}\Leftrightarrow\Lambda^n_{pn}+\nu^0_p+\Lambda^n_{pq}\nu^q_n+\Lambda^n_{p\alpha}\nu^\alpha_n=0,$$

$$\overset{\delta 5}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}\Leftrightarrow b^0_p-\nu^0_p+b^n_{pq}\nu^q_n=0, \tag{9}$$

$$\overset{\delta 6}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}\Leftrightarrow\lambda^0_p-\nu^0_p+\Lambda^n_{qp}\nu^q_n=0, \tag{10}$$

$$\overset{\delta 7}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}\Leftrightarrow V^0_p-\nu^0_p+\Lambda^n_{qp}\nu^q_n=0, \tag{11}$$

$$\overset{\delta 8}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}\Leftrightarrow h^0_p-\nu^0_p+\Lambda^n_{qp}\nu^q_n=0, \tag{12}$$

$$\overset{\delta 9}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}\Leftrightarrow C^0_p+3B^0_p-4\nu^0_p+2\Lambda^n_{qp}\nu^q_n=0, \tag{13}$$

$$\overset{\delta 10}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}\Leftrightarrow C^0_p-\nu^0_p-\Lambda^n_{qp}\nu^q_n=0, \tag{14}$$

$$\overset{\delta 11}{\nabla}{}^{\perp}\equiv\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}\Leftrightarrow\Lambda^n_{pq}T^q_n=0\Leftrightarrow T^p_n\overset{\mathrm{def}}{=}W^p_n+F^p_n=0. \tag{15}$$

Свертывая (6) — (8) с тензором b^{tp}_n, получим

$$\underset{1}{\nu}{}_n^t = -\frac{1}{2} b_n^{tp} (\Lambda_{pn}^n + \lambda_p^0 + \Lambda_{p\alpha}^n \Lambda_n^\alpha) \overset{def}{=} \underset{1}{H}{}_n^t,$$

$$\underset{2}{\nu}{}_n^t = -\frac{1}{2} b_n^{tp} (\Lambda_{pn}^n + \nu_p^0 + \Lambda_{p\alpha}^n \Lambda_n^\alpha) \overset{def}{=} \underset{2}{H}{}_n^t, \qquad (16)$$

$$\underset{3}{\nu}{}_n^t = -\frac{1}{2} b_n^{tp} (\Lambda_{pn}^n + H_p^0 + \Lambda_{p\alpha}^n \Lambda_n^\alpha) \overset{def}{=} \underset{3}{H}{}_n^t.$$

Таким образом, поле нормалей 1-го рода $\{\underset{x}{\nu}{}_n^t\}(x = \overline{1,3})$ Λ-подрасслоения совпадает с соответствующим полем нормалей $\{\underset{x}{H}{}_n^t\}$ (16), при этом выбор поля нормалей 2-го рода Λ-подрасслоения произволен.

Теорема 2. *Нормальные связности* $\overset{\delta x}{\nabla}{}^\perp$ *и* $\overset{\delta 0}{\nabla}{}^\perp$, *индуцируемые на оснащенном в смысле Нордена — Картана* Λ*-подрасслоении совпадают тогда и только тогда, когда поле нормалей 1-го рода* $\underset{x}{N}{}_{n-r}$ *определяется соответствующим полем квазитензора* $\{\underset{x}{H}{}_n^t\}$ (16), *при этом выбор поля нормалей 2-го рода* Λ*-подрасслоения произволен.*

В силу формул из [4; 6]

$$\overline{\nu}_n^p = -\Lambda_n^{pq} \nu_q^0, \quad \overline{\nu}_p^0 = \Lambda_{qp}^n \nu_n^q$$

и формул (16), получим

$$\underset{1}{\nu}{}_p^0 = -\frac{1}{2} \Lambda_{ps}^n b_n^{st} (\overline{\Lambda}_{tn}^n + \overline{\lambda}_t^0 + \overline{\Lambda}_{t\alpha}^n \overline{\Lambda}_n^\alpha) \overset{def}{=} \underset{1}{H}{}_p^0,$$

$$\underset{2}{\nu}{}_p^0 = -\frac{1}{2} \Lambda_{ps}^n b_n^{st} (\overline{\Lambda}_{tn}^n + \overline{V}_t^0 + \overline{\Lambda}_{t\alpha}^n \overline{\Lambda}_n^\alpha) \overset{def}{=} \underset{2}{H}{}_p^0, \qquad (17)$$

$$\underset{3}{\nu}{}_p^0 = -\frac{1}{2} \Lambda_{ps}^n b_n^{st} (\overline{\Lambda}_{tn}^n + \overline{h}_t^0 + \overline{\Lambda}_{t\alpha}^n \overline{\Lambda}_n^\alpha) \overset{def}{=} \underset{3}{H}{}_p^0.$$

Итак, поле нормалей 2-го рода $\{\underset{x}{\nu}{}_p^0\}$ Λ-подрасслоения совпадает с соответствующим полем нормалей $\{\underset{x}{H}{}_p^0\}$ (17); при этом выбор поля нормалей 1-го рода Λ-подрасслоения произволен. Следовательно, справедлива

Теорема 2*. *Нормальные связности* $\overset{\delta x}{\overline{\nabla}}$ и $\overset{\delta 0}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$, *индуцируемые на оснащенном в смысле Нордена — Бортолотти* Λ*-подрасслоении, совпадают тогда и только тогда, когда поле нормалей 2-го рода* $\underset{x}{\mathrm{N}}_{r-1}$ *определяется соответствующим полем квазитензора* $\{\underset{x}{H}{}^0_p\}$ *(17); при этом выбор поля нормалей 1-го рода произволен.*

3. Из соотношения (9) следует

$$T_p^0 \overset{def}{=} b_p^0 + b_{pq}^n \nu_n^q - \nu_p^0 = 0. \tag{18}$$

В силу двойственности WH -распределения [2; 3] из (18) получаем

$$\overline{T}_p^0 \overset{def}{=} \overline{b}_p^0 + \overline{b}_{pq}^n \overline{\nu}_n^q - \overline{\nu}_p^0 = -T_p^0 = 0. \tag{19}$$

Согласно (18), (19) получаем две двойственные друг другу

Теоремы 3 (3*). *Индуцируемые на оснащенном в смысле Нордена — Картана (Нордена — Бортолотти)* Λ*-подраслоении нормальные связности* $\overset{\delta 5}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp}$ $[\overset{\delta 5}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ и $\overset{\delta 0}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}]$ *совпадают тогда и только, когда нормализация* Λ*-подрасслоения является взаимной.*

Следствиями теорем 2 (2*) и 3 (3*) являются следующие предложения.

Теоремы 4 (4*). *Если оснащенное в смысле Нордена — Картана (Нордена — Бортолотти)* Λ*-подрасслоение нормализовано полями первых аналогов нормалей Фубини* $\{\Phi_n^p, \Phi_p^o\}$, *где*

$$\Phi_n^p \overset{def}{=} \frac{1}{2} b_n^{pq}(C_q^0 + 3B_q^0 - 4b_q^o);\ \ \Phi_{\mathrm{p}}^0 \overset{def}{=} \frac{1}{2}(C_p^o + 3B_p^0 - 2b_p^0),$$

а в случае, когда $\Lambda_{[pq]}^n = 0$ полями нормалей Вильчинского [4; 6], то нормальные связности $(\overset{\delta 5}{\nabla}{}^{\perp}$ и $\overset{\delta 0}{\nabla}{}^{\perp})$ $[\overset{\delta 5}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}$ и $\overset{\delta 0}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}]$ совпадают.

Теоремы 5 (5[*]). *Индуцируемая на оснащенном в смысле Нордена — Картана (Нордена — Бортолотти)* Λ *-подрасслоении каждая тройка нормальных связностей* $(\overset{\delta x}{\nabla^{\perp}}, \overset{\delta 5}{\nabla^{\perp}}, \overset{\delta 0}{\nabla^{\perp}})$ $[\overset{\delta x}{\overline{\nabla}^{\perp}}, \overset{\delta 5}{\overline{\nabla}^{\perp}}, \overset{\delta 0}{\overline{\nabla}^{\perp}}]$ *вырождается в одну связность тогда и только тогда, когда поле нормалей 1-го рода* $\{\underset{x}{\nu_n^p}\}$ *[2-го рода* $\{\underset{x}{\nu_p^0}\}$*] задано полем квазитензора* $\{\underset{x\ n}{H^p}\}$ *(16)* $[\{\underset{x\ p}{H^0}\}$ (17)$]$ *и нормализация взаимна.*

4. Пусть $\Lambda^n_{[pq]} \neq 0$ и выполняется одно из условий $(\overset{6}{\Gamma}{}^n_{np} = \overset{10}{\Gamma}{}^n_{np} = 0)$, $(\overset{7}{\Gamma}{}^n_{np} = \overset{10}{\Gamma}{}^n_{np} = 0)$, $(\overset{8}{\Gamma}{}^n_{np} = \overset{10}{\Gamma}{}^n_{np} = 0)$, тогда соответственно, находим:

$$\begin{cases} \lambda^0_p - \nu^0_p + \lambda^n_{qp}\nu^q_n = 0, \\ C^0_p - \nu^0_p - \Lambda^n_{qp}\nu^q_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu^p_n = -\dfrac{1}{2}\Lambda^{qp}_n(C^0_q - \lambda^0_q) \overset{def}{=} \underset{1}{F}{}^p_n, \\ \nu^0_p = \dfrac{1}{2}(C^0_p + \lambda^0_p) \overset{def}{=} \underset{1}{F}{}^0_p \ ; \end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} V^0_p - \nu^0_p + \Lambda^n_{qp}\nu^q_n = 0, \\ C^0_p - \nu^0_p - \Lambda^n_{qp}\nu^q_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu^p_n = \dfrac{1}{2}\Lambda^{qp}_n(C^0_q - V^0_q) \overset{def}{=} \underset{2}{F}{}^p_n, \\ \nu^0_p = \dfrac{1}{2}(C^0_p + V^0_p) \overset{def}{=} \underset{2}{F}{}^0_p \ ; \end{cases} \tag{21}$$

$$\begin{cases} h^0_p - \nu^0_p + \Lambda^n_{qp}\nu^q_n = 0, \\ C^0_p - \nu^0_p - \Lambda^n_{qp}\nu^q_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \nu^p_n = \dfrac{1}{2}\Lambda^{qp}_n(C^0_q - h^0_q) \overset{def}{=} \underset{3}{F}{}^p_n, \\ \nu^0_p = \dfrac{1}{2}(C^0_p + h^0_p) \overset{def}{=} \underset{3}{F}{}^0_p . \end{cases} \tag{22}$$

Квазитензоры (20) — (22) можно получить непосредственно также из соотношений (10) — (12), (14). В результате, в силу соотношений [4; 6]

$$\overset{6}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = -\overset{6}{\Gamma}{}^n_{np};\ \overset{7}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = -\overset{7}{\Gamma}{}^n_{np};\ \overset{8}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = -\overset{8}{\Gamma}{}^n_{np};\ \overset{10}{\overline{\Gamma}}{}^n_{np} = \overset{10}{\Gamma}{}^n_{np}, \tag{23}$$

выполняются двойственные предложения:

Теоремы 6 (6[*]). *Каждая из совокупностей нормальных связностей*

$$(\overset{\delta6}{\nabla^{\perp}},\overset{\delta10}{\nabla^{\perp}},\overset{\delta0}{\nabla^{\perp}}),(\overset{\delta7}{\nabla^{\perp}},\ \overset{\delta10}{\nabla^{\perp}},\ \overset{\delta0}{\nabla^{\perp}}),(\overset{\delta8}{\nabla^{\perp}},\overset{\delta10}{\nabla^{\perp}},\overset{\delta0}{\nabla^{\perp}})$$

$$[(\overset{\delta6}{\overline{\nabla}^{\perp}},\overset{\delta10}{\overline{\nabla}^{\perp}},\overset{\delta0}{\overline{\nabla}^{\perp}}),(\overset{\delta7}{\overline{\nabla}^{\perp}},\overset{\delta10}{\overline{\nabla}^{\perp}},\overset{\delta0}{\overline{\nabla}^{\perp}}),(\overset{\delta8}{\overline{\nabla}^{\perp}},\overset{\delta10}{\overline{\nabla}^{\perp}},\overset{\delta0}{\overline{\nabla}^{\perp}})]$$

вырождается в одну связность тогда и только тогда, когда Λ-*подрасслоение нормализовано, соответственно, одной из пар полей квазитензоров (20) — (22).*

5. На Λ-подрасслоении с полем симметрического тензора Λ^{n}_{pq} имеем

$$\begin{aligned}&(\overline{F}^{p}_{n}=-F^{p}_{n}-b^{pq}_{n}b^{0}_{q};\ \overline{\mathrm{W}}^{\mathrm{p}}_{\mathrm{n}}=-W^{p}_{n}+b^{pq}_{n}b^{0}_{q})\Rightarrow\\&\overline{T}^{p}_{n}=\overline{F}^{p}_{n}+\overline{W}^{p}_{n}=-T^{p}_{n}.\end{aligned}\qquad(24)$$

Из соотношений (15), (24) вытекают два двойственных друг другу предложения:

Теорема 7 (7*). *На регулярном, оснащенном в смысле Нордена — Картана (Нордена — Бортолотти),* Λ-*подрасслоении с полем симметрического тензора* Λ^{n}_{pq} *нормальные связности* $(\overset{\delta11}{\nabla^{\perp}}\text{ и }\overset{\delta0}{\nabla^{\perp}})$ $([\overset{\delta11}{\overline{\nabla}^{\perp}}\text{ и }\overset{\delta0}{\overline{\nabla}^{\perp}}])$ *совпадают тогда и только тогда, когда* Λ *-подрасслоение коинцидентно.*

С помощью формул (2) — (3) получаем следующие соотношения

$$\overset{4}{\Gamma}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}}+\overset{6}{\Gamma}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}}=2\overset{1}{\Gamma}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}};\overset{4}{\Gamma}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}}+\overset{7}{\Gamma}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}}=2\overset{2}{\Gamma}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}};\overset{4}{\Gamma}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}}+\overset{8}{\Gamma}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}}=2\overset{3}{\Gamma}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}}.\qquad(25)$$

В силу зависимостей [4; 6]

$$\overset{1}{\overline{\Gamma}}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}}=\overset{1}{\Gamma}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}}-\overset{6}{\Gamma}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}};\overset{2}{\overline{\Gamma}}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}}=\overset{2}{\Gamma}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}}-\overset{7}{\Gamma}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}};\overset{3}{\overline{\Gamma}}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}}=\overset{3}{\Gamma}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}}-\overset{8}{\Gamma}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}},\overset{4}{\overline{\Gamma}}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}}=\overset{4}{\Gamma}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}}$$

и формул (25) находим, что

$$\overset{4}{\overline{\Gamma}}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}}+\overset{6}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{np}=2\overset{1}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{np};\ \overset{4}{\overline{\Gamma}}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}}+\overset{7}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{np}=2\overset{2}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{np};\ \overset{4}{\overline{\Gamma}}{}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{np}}+\overset{8}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{np}=2\overset{3}{\overline{\Gamma}}{}^{n}_{np}.\qquad(26)$$

Из (25) и (26) следует, что в точно такой же зависимости (как (25) и (26)) находится соответствующие тройки нормальных связностей. Значит, справедливы следующие двойственные друг другу

Теоремы 8 (8*). *Индуцируемая на оснащенном в смысле Нордена — Картана (Нордена — Бортолотти)* Λ*-подрасслоении тройка нормальных связностей* $(\overset{\delta4}{\nabla}{}^{\perp},\ \overset{\delta6}{\nabla}{}^{\perp},\ \overset{\delta1}{\nabla}{}^{\perp})$ $[\overset{\delta4}{\overline{\nabla}}{}^{\perp},\ \overset{\delta6}{\overline{\nabla}}{}^{\perp},\ \overset{\delta1}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}])$ *вырождается в одну связность тогда и только тогда, когда любые две из них совпадают. Аналогичное утверждение имеет место для троек связностей* $(\overset{\delta4}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta7}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta2}{\nabla}{}^{\perp})$, $(\overset{\delta4}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta8}{\nabla}{}^{\perp},\overset{\delta3}{\nabla}{}^{\perp})$ $[(\overset{\delta4}{\overline{\nabla}}{}^{\perp},\overset{\delta7}{\overline{\nabla}}{}^{\perp},\overset{\delta2}{\overline{\nabla}}{}^{\perp}),(\overset{\delta4}{\overline{\nabla}}{}^{\perp},\overset{\delta8}{\overline{\nabla}}{}^{\perp},\overset{\delta3}{\overline{\nabla}}{}^{\perp})]$.

Список литературы

1. *Максакова Т.Ю.* Вырожденные трехсоставные распределения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2005. Вып. 36. С. 59—64.

2. *Максакова Т.Ю.* Двойственный образ WH -распределения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2006. Вып. 37. С. 59—65.

3. *Максакова Т.Ю.* Двойственные нормальные связности Λ-подрасслоения WH -распределения проективного пространства // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2007. Вып. 38. С. 74—81.

4. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Монография. 2-е изд. Чебоксары, 1992.

5. *Чакмазян А.В.* Нормальная связность геометрии подмногообразий. Монография. Ереван, 1990.

6. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства. Монография. Л.: Изд-во ЛГУ, 1992.

T. Maksakova

DUAL NORMAL CONNECTIONS OF WH -DISTRIBUTION

Analytical and geometrical signs of degeneration (coincidence) of different subgroups of normal connections for WH -distribution into one connection are explored.