N. Malakhovsky

COMPUTER MODELLING OF G. F. LAPTEV`S METHOD OF CONTINUATIONS AND CLOTHINGS

The characteristic of computer modelling of G. F. Laptev's method of continuations and clothings for differentiable manifolds in the homogeneous and generalized spaces is given. This modelling is carried out with use of the computer program of automatic search of fields of geometrical objects of the investigated manifolds of figures (L-program). Performance of the L-program is shown on examples of a hypersurface in ($n$ + 1)-dimensional projective space, manifold $(m,m,n)^2$ of quadratic elements $(m<n)$ in $n$-dimensional projective space and $n$-parametrical family $\Pi_n$ of equipped kollineations $\pi : P_n \to p_n$ of two projective spaces [3].

УДК 514.756.2

***А.М. Матвеева***

*(Чувашский государственный педагогический университет, г. Чебоксары)*

## ЧЕБЫШЕВСКИЕ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ТКАНИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В КОНФОРМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Работа посвящена приложению аффинной связности $\overset{n-1}{\nabla}$ [4] к изучению геометрии тканей, заданных на распределении $\mathcal{M}$ гиперплоскостных элементов в конформном пространстве $C_n$, а именно рассмотрены геодезические и чебышевские ткани в аффинной связности $\overset{n-1}{\nabla}$.

Во всей работе индексы принимают следующие значения:

$$\lambda, \mu = \overline{0, n+1};\ K = \overline{1, n};\ i, j, k, s = \overline{1, n-1}.$$

**1.** Отнесем конформное пространство $C_n$ к подвижному полуизотропному [1; 3] реперу $R = \{A_\lambda\}$. Рассмотрим распределения [7] $\mathcal{M}$ *и* $\mathcal{H}$ ($n$–1)-мерных и одномерных линейных элементов $(A_0, L_{n-1})$ и $(A_0, L_1)$ ($n \geq 3$). Здесь $L_{n-1}$ есть ($n$–1)-параметрическая связка гиперсфер $P = \xi^0 A_0 + \xi^i P_i$, натянутых на точку $A_0$ и гиперсферы $P_i = A_i + x_i^0 A_0$; аналогично $L_1$ есть пучок гиперсфер $Q = \eta^0 A_0 + \eta^n P_n$, где $P_n = A_n + x_n^0 A_0$.

Рассмотрим взаимно ортогональные [7] распределения $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$, т. е. $(P_i P_n) \equiv (A_i A_n) = g_{in} = 0$. Заметим, что $(A_\lambda A_\mu) = g_{\lambda\mu}$, $g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda}$, $|g_{\lambda\mu}| \neq 0$, причем

$$dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{kj}\omega_i^k = 0. \qquad (1)$$

Известно [7], что в выбранном репере распределения $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$ определяются, соответственно, следующими системами дифференциальных уравнений:

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega_0^K,\ \omega_n^i = \Lambda_{nK}^i \omega_0^K, \qquad (2)$$

причем имеют место зависимости $g_{ij}\Lambda_{nK}^j + g_{nn}\Lambda_{iK}^n = 0$.

В выражениях гиперсфер $P_i$ и $P_n$ функции $x_i^0$, $x_n^0$ подчинены дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} &dx_i^0 + x_i^0\omega_0^0 - x_j^0\omega_i^j + \omega_i^0 = x_{iK}^0\omega_0^K, \\ &dx_n^0 + x_n^0(\omega_0^0 - \omega_n^n) + \omega_n^0 = x_{nK}^0\omega_0^K, \end{aligned} \qquad (3)$$

следовательно, задание полей квазитензоров $x_i^0$, $x_n^0$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (3), равносильно полному оснащению [1] обоих ортогональных распределений $\mathcal{M}$ и $\mathcal{H}$.

**2.** При перенесении Дарбу конформного пространства $C_n$ в проективное пространство $\mathrm{P}_{n+1}$ линейный элемент $L_{n-1}$ распределения $\mathcal{M}$ отображается в плоскость $\Pi_{n-1}(\mathrm{A}_0)=[\mathrm{A}_0\mathrm{A}_i]$, которая принадлежит касательной гиперплоскости $\mathrm{T}_n(\mathrm{A}_0)$ к гиперквадрике Дарбу $Q_n^2$ в точке $\mathrm{A}_0$. Обозначим через $\pi$ распределение плоскостей $\Pi_{n-1}\subset\mathrm{P}_{n+1}$.

Пусть на распределении $\pi$ в $\mathrm{P}_{n+1}$ задано $n-1$ линейно независимых гладких полей допустимых [5] направлений $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_i$, где $\mathrm{B}_i=a_i^j\mathrm{A}_j$, $\left|a_i^j\right|\neq 0$. Линии, огибающие поля этих направлений, принадлежат распределению $(n-1)$-мерных линейных элементов $\pi$ и образуют на нем $(n-1)$-ткань $\tilde{\tilde{\Sigma}}$, причем прямые $(\mathrm{A}_0\mathrm{B}_i)$ являются касательными к ее линиям в точке $\mathrm{A}_0$. В этом случае по аналогии с работой [6] будем говорить, что на распределении $\pi$ в $\mathrm{P}_{n+1}$ задана $(n-1)$-ткань $\tilde{\tilde{\Sigma}}$.

В проективном репере $\mathrm{R}=\{\mathrm{A}_0,\mathrm{A}_i,\mathrm{A}_n,\mathrm{A}_{n+1}\}$, отнесенном к ткани $\tilde{\tilde{\Sigma}}$ на $\pi$ (т. е. вершины $\mathrm{A}_i$ репера R выбраны на касательных к линиям ткани $\tilde{\tilde{\Sigma}}$), дифференциальные уравнения ткани $\tilde{\tilde{\Sigma}}$ имеют вид [2]:

$$\omega_i^n=\Lambda_{iK}^n\omega_0^K,\ \ \omega_n^i=\Lambda_{nK}^i\omega_0^K,\ \ \omega_i^j=a_{iK}^j\omega_0^K,\ \ i\neq j. \tag{4}$$

Каждому из $n-1$ семейств линий ткани $\tilde{\tilde{\Sigma}}$ на $\pi$ при перенесении Дарбу на распределении $\mathcal{M}$ в $C_n$ соответствует семейство линий; $n-1$ таких линейно независимых семейств на распределении $\mathcal{M}$ образуют ткань $\Sigma$ в $C_n$.

В конформном репере $R$, отнесенном к ткани $\Sigma$ на распределении $\mathcal{M}$ в $C_n$, эта ткань определяется системой дифференциальных уравнений (4). Это значит, что в полуизотропном полуортогональном репере $R = \{A_0, A_i, A_n, A_{n+1}\}$ каждая гиперсфера $A_i$ принадлежит пучку касающихся между собой в его центре $A_0 \in \mathcal{M}$ гиперсфер, определяемому точкой $A_0$ и гиперсферой $dA_0 \pmod l \{\omega_0^k = 0, k \neq i\})$. Следовательно, в выбранном репере $R$ роль «касательной» к $i$-й линии ткани $\Sigma$ на $\mathcal{M}$ в ее точке $A_0$ играет пучок гиперсфер $X_i = A_i + \lambda_i A_0$.

Возьмем совокупность функций

$$a_i^s \overset{def}{=} \sum_{j \neq i} g_{ij} g^{js} - (n-2)\delta_i^s, \quad \delta a_i^s = a_i^s(\pi_i^i - \pi_s^s). \tag{5}$$

Здесь матрица порядка $n - 1$ из относительных ($i \neq s$) и абсолютных ($i = s$) инвариантов $a_i^s$ невырождена.

Так как $\left|a_i^s\right| \neq 0$, то существует обратная матрица $(\overset{*}{a}{}_k^i)$:

$$\overset{*}{a}{}_k^i a_i^s = \overset{*}{a}{}_i^s a_k^i = \delta_k^s, \ \delta \overset{*}{a}{}_k^t = \overset{*}{a}{}_k^t(\pi_k^k - \pi_t^t).$$

Возьмем охват

$$q_i^0 \overset{def}{=} (\sum_{j \neq k} a_{kj}^j) \overset{*}{a}{}_i^k, \ dq_i^0 + q_i^0(\omega_0^0 - \omega_i^i) + \omega_i^0 = q_{iK}^0 \omega_0^K. \tag{6}$$

Рассмотрим гиперсферы

$$F_i = q_i^0 A_0 + A_i, \tag{7}$$

принадлежащие «касательным» к линиям ткани $\Sigma$ на $\mathcal{M}$ в $C_n$. Они являются инвариантными ($\delta F_i = \pi_i^i F_i$); назовем их *гармоническими гиперсферами* ткани. Очевидно, что в силу уравнений (6), ($3_1$) поле гармонических окружностей $F \overset{def}{=} [F_i]$ пересечения $n - 1$ гармонических гиперсфер $F_i$ ткани задает нормальное оснащение распределения $\mathcal{M}$ в $C_n$.

**3.** Допустим, что ткань $\Sigma$ на $\mathcal{M}$ в $C_n$ — ортогональная, т. е. касательные к ее линиям попарно ортогональны:

$$(X_i X_j) = (A_i A_j) = g_{ij} = 0, \quad i \neq j. \tag{8}$$

Из дифференциальных уравнений (1) для последних равенств имеем $g_{ii} a^i_{jK} + g_{jj} a^j_{iK} = 0, \quad i \neq j$, откуда находим

$$\begin{gathered} a^j_{ij} = -g^{jj} g_{ii} a^i_{jj}, \quad i \neq j \text{, по } j \text{ нет суммирования,} \\ g_{ii} a^i_{jk} + g_{jj} a^j_{ik} = 0 \text{, все индексы различны,} \\ g_{ii} a^i_{jn} + g_{jj} a^j_{in} = 0, \quad i \neq j. \end{gathered} \tag{9}$$

С использованием (8) функции (5) примут вид:

$$a^s_i = -(n-2)\delta^s_i, \tag{10}$$

а элементы $\overset{*}{a}{}^k_i$ обратной матрицы запишутся в виде:

$$\overset{*}{a}{}^k_i = -\frac{1}{n-2}\delta^k_i. \tag{11}$$

Охват (6) с использованием ($9_1$), (11) примет вид:

$$q^0_i = -\frac{1}{n-2}\sum_{j \neq i} a^j_{ij} = \frac{1}{n-2} g_{ii} \sum_{j \neq i} g^{jj} a^i_{jj}. \tag{12}$$

Следовательно, гармонические гиперсферы (7) ортогональной ткани $\Sigma$ на распределении $\mathcal{M}$ в $C_n$ задаются $n-1$ квазитензорами $q^0_i$, определяемыми соотношениями (12).

Отметим, что каждая из $n-2$ гиперсфер

$$F_i^{\,j} = -a^j_{ij} A_0 + A_i = g^{jj} g_{ii} a^i_{jj} A_0 + A_i, \quad i \neq j, \tag{13}$$

принадлежащих «касательной» к $i$-й линии ортогональной ткани $\Sigma$ на распределении $\mathcal{M}$ в $C_n$, является инвариантной: $\delta F_i^{\,j} = \pi^i_i F_i^{\,j}$. По аналогии с работой [2] назовем их *псевдофокальными гиперсферами* касательной $A_0 A_i$ к $i$-й линии ткани $\Sigma$ на распределении $\mathcal{M}$ в $C_n$.

**4.** Возьмем систему форм Пфаффа $\{\theta_0^j, \theta_i^j\}$, где

$$\theta_0^j = \omega_0^j,\ \theta_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j\left(\omega_0^0 - x_K^0\omega_0^K\right) + g^{jk}x_k^0\omega_i^{n+1} + x_i^0\omega_0^j. \quad (14)$$

Согласно [4], система форм (14) устанавливает фундаментально-групповую аффинную связность $\overset{n-1}{\nabla}$ на вполне оснащенном распределении $\mathcal{M}$; соответствующее пространство аффинной связности обозначим через $A_{n,n-1}$. Справедлива

**Теорема 1.** *При полном оснащении распределения $\mathcal{M}$, погруженного в конформное пространство $C_n$, на $\mathcal{M}$ индуцируется пространство аффинной связности $A_{n,n-1}$, базой которого является пространство $C_n$, и слоевыми формами (14).*

**5.** Одномерный линейный элемент $L_1$, определяемый точкой $A_0$ и гиперсферой $M = \mu^k(x_k^0 A_0 + A_k)$ (т. е. пучок касающихся между собой в центре $A_0$ гиперсфер $X = M + \lambda A_0$) назовем *направлением* $A_0 M$ на распределении $\mathcal{M}$.

Кривая, принадлежащая распределению гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}$ в $C_n$, имеет уравнения [7]

$$l_{\mathcal{M}} : \omega_0^n = 0,\ \omega_0^i = l^i\theta,\ D\theta = \theta \wedge \theta_0^0. \quad (15)$$

Условием параллельного перенесения [5] направления $A_0 M$ вдоль кривой $l \subset \mathcal{M}$ в аффинной связности $\overset{n-1}{\nabla}$, определяемой системой форм (14), является выполнение уравнений

$$d\mu^k + \mu^i\theta_i^k = \Theta\mu^k \pmod{l_{\mathcal{M}}}. \quad (16)$$

Согласно соотношениям (16), условие параллельного перенесения направления $A_0 A_i$ ($\mu^i = 1,\ \mu^j = 0,\ i \neq j$) касательной к $i$-й линии ткани $\Sigma$ на распределении $\mathcal{M}$ в $C_n$ вдоль линии $l \subset \mathcal{M}$ в аффинной связности $\overset{n-1}{\nabla}$ имеет вид:

$$\theta_i^k = 0 \pmod{l_{\mathcal{M}}},\quad i \neq k.$$

Если в качестве линии $l \subset \mathcal{M}$ взять линию $\omega_0^j$ (все $\omega_0^s = 0, \quad s \neq j$) ортогональной ткани, то последнее условие с использованием (14), (4), (15), (8) равносильно соотношениям

$$a_{ij}^k - g^{kk} g_{ij} x_k^0 + \delta_j^k x_i^0 = 0, \; i \neq k \; \pmod{l_{\mathcal{M}}\{\omega_0^s = 0, s \neq j\}}. \quad (17)$$

Таким образом, *условием параллельного перенесения направления $A_0 A_i$ касательной к i-й линии ортогональной ткани $\Sigma$ на распределении $\mathcal{M}$ в $C_n$ вдоль ее j-й линии в аффинной связности $\overset{n-1}{\nabla}$, индуцируемой полным оснащением распределения гиперплоскостных элементов $\mathcal{M}$ в $C_n$, является выполнение соотношений (17).*

**Определение.** *Ткань $\Sigma$ на распределении $\mathcal{M}$ в $C_n$ назовем чебышевской (геодезической), если все направления касательных $A_0 A_i$ к i-й линии ткани $\Sigma$ переносятся параллельно вдоль любой другой линии $\omega_0^j$, $i \neq j$ ткани $\Sigma$ (вдоль соответствующей ее линии $\omega_0^i$) в аффинной связности $\overset{n-1}{\nabla}$.*

Из соотношений (17) при $i \neq j$ следует условие, при выполнении которого ортогональная ткань $\Sigma$ на распределении $\mathcal{M}$ в $C_n$ является чебышевской в связности $\overset{n-1}{\nabla}$:

$$a_{ij}^k + \delta_j^k x_i^0 = 0, i \neq k, i \neq j \; \pmod{l_{\mathcal{M}}\{\omega_0^s = 0, s \neq j\}}. \quad (18)$$

Из соотношений (17) при $j = i$ следует условие геодезичности ортогональной ткани $\Sigma$ на распределении $\mathcal{M}$ в $C_n$ в связности $\overset{n-1}{\nabla}$:

$$a_{ii}^k - g^{kk} g_{ii} x_k^0 = 0, i \neq k \; \pmod{l_{\mathcal{M}}\{\omega_0^s = 0, s \neq j\}}. \quad (19)$$

Из условия (19) имеем

$$x_k^0 = g^{ii} g_{kk} a_{ii}^k, \quad i \neq k. \quad (20)$$

В силу соотношений (12), (13) с использованием (20) справедлива

**Теорема 2.** *Если относительно некоторого полного оснащения распределения $\mathcal{M}$ в $C_n$ полями квазитензоров $x_i^0$, $x_n^0$ подмногообразие $M$ несет ортогональную геодезическую ткань $\Sigma$ в аффинной связности $\overset{n-1}{\nabla}$, то она является тканью с совпавшими псевдофокальными гиперсферами, и данное полное оснащение является оснащением полем его гармонических окружностей $[F_i]$ ($x_i^0 \equiv q_i^0$) и полем квазитензора $x_n^0$ (т. е. касательное оснащение — любое).*

Имеет место и обратное утверждение:

**Теорема 3.** *Если ортогональная ткань $\Sigma$ на распределении $\mathcal{M}$ в $C_n$ есть ткань с совпавшими псевдофокальными гиперсферами, то при полном оснащении распределения $\mathcal{M}$ в $C_n$ полем его гармонических окружностей $[F_i]$ и полем квазитензора $x_n^0$ (касательное оснащение — любое) данная ткань является геодезической относительно аффинной связности $\overset{n-1}{\nabla}$.*

Пусть распределение $\mathcal{M}$ ($n > 3$) несет ортогональную чебышевскую ткань $\Sigma$. В силу соотношений (18), ($9_1$), (12), (13) и теоремы 3 справедлива

**Теорема 4.** *Если ортогональная ткань $\Sigma$ на распределении $\mathcal{M}$ в $C_n$ относительно некоторого полного оснащения распределения $\mathcal{M}$ в $C_n$ является чебышевской в аффинной связности $\overset{n-1}{\nabla}$, то она является геодезической; при этом данное полное оснащение есть оснащение распределения $\mathcal{M}$ в $C_n$ полем его гармонических окружностей $[F_i]$ и полем квазитензора $x_n^0$ (касательное оснащение — любое).*

**Замечание.** Всякая ортогональная ткань $\Sigma$ на распределении $\mathcal{M}$ в $C_3$ при полном оснащении распределения

2-мерных линейных элементов $\mathcal{M}$ в $C_3$ полем его гармонических окружностей $[F_i]$ и полем квазитензора $x_3^0$ относительно аффинной связности $\overset{2}{\nabla}$ является геодезической и чебышевской одновременно.

### *Список литературы*

1. *Акивис М. А.* К конформно-дифференциальной геометрии многомерных поверхностей // Матем. сб. 1961. Т. 53. №1. С. 53—72.

2. *Базылев В. Т.* О сетях на многомерных поверхностях проективного пространства // Изв. вузов. Матем. Казань, 1966. №2. С. 9—19.

3. *Бушманова Г. В., Норден А. П.* Элементы конформной геометрии. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1972.

4. *Матвеева А. М.* Аффинные связности, индуцируемые полным оснащением взаимно ортогональных распределений конформного пространства / ВИНИТИ РАН. М., 2006. №395. В2006.

5. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976.

6. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. 2-е изд., доп. Чебоксары: Изд-во Чуваш. гос. пед. ин-та, 1994.

7. *Столяров А. В.* Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований и его приложений. Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2002.

A. Matveeva

## CHEBYSHEV AND GEODESIC WEBS ON THE DISTRIBUTION OF HYPERPLANE ELEMENTS OF THE CONFORMAL SPACE

The work is devoted to the application of the affine connection $\overset{n-1}{\nabla}$ to understand the geometry of webs defined on the distribution $\mathcal{M}$ of hyperplane elements in the conformal space $C_n$. Chebyshev and geodesic webs in the affine connection $\overset{n-1}{\nabla}$ are considered.