

К. В. Полякова 

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия

polyakova_@mail.ru

doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-9

Обобщенные тождества Риччи и Бианки для связности с нетензорами кручения и кривизны

Рассматривается многообразие, структурные уравнения которого построены с помощью деформации внешнего дифференциала. Кручение и кривизна аффинной связности на этом многообразии не являются тензорами. Кривизна является тензором, причем нулевым, только для канонической связности. Кручение совпадает с антисимметрией слоевых координат и не обращается в нуль даже для канонической связности. Каноническая связность, в отличие от связности Леви-Чивиты, является плоской и несимметричной.

Построены обобщенные тождества Риччи и Бианки для кривизны и кручения аффинной связности на этом многообразии. Однако повторный деформированный дифференциал от базисных форм и форм связности обращается в нуль только вдоль линии на многообразии. Для канонической связности эти тождества приобретают классический вид. Причем в этом случае повторный деформированный дифференциал от форм связности тождественно равен нулю, а повторный деформированный дифференциал от базисных форм обращается в нуль только вдоль линии на многообразии.

Ключевые слова: тождества Риччи и Бианки, объекты кручения и кривизны, полусимметрическая связность, каноническая связность

Поступила в редакцию 02.05.2025 г.

© Полякова К. В., 2025

Продолжается изучение деформирующегося многообразия $\check{X}_m$ [23], начатое в [7; 8] и рассматривающее дифференциал $\check{D}$, определенный для дифференциальной 1-формы ω формулой (ср. [15; 16; 25; 26])

$$\check{D}\omega = D\omega + (df \wedge \omega)|_{\Lambda^2 T^*}$$

и включающий возмущение внешнего дифференциала D (см., напр., [10]).

В расслоении линейных реперов над многообразием $\check{X}_m$ зададим связность $\check{\Gamma}_{jk}^i$ с помощью форм

$$\check{\omega}_j^i = \tilde{\omega}_j^i - \check{\Gamma}_{jk}^i \omega^k \quad (\check{\Delta} \check{\Gamma}_{jk}^i + \check{\omega}_{jk}^i = \check{\Gamma}_{jk,l}^i \omega^l),$$

где $i, j, k = 1, \dots, m$.

Структурные уравнения для базисных форм ω^i и форм связности $\check{\omega}_j^i$ приведем к виду

$$\check{D}\omega^i = \omega^j \wedge \check{\omega}_j^i + \frac{1}{2} \check{T}_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \quad (1)$$

$$\check{D}\check{\omega}_j^i = \check{\omega}_j^k \wedge \check{\omega}_k^i + \frac{1}{2} \check{R}_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \quad (2)$$

объекты кручения $\check{T}_{jk}^i$ и кривизны $\check{R}_{jkl}^i$ выражаются по формулам

$$\frac{1}{2} \check{T}_{jk}^i = \check{\Gamma}_{[jk]}^i, \quad \frac{1}{2} \check{R}_{jkl}^i = \check{\Gamma}_{j[k,l]}^i - \check{\Gamma}_{j[k}^s \check{\Gamma}_{|s|l]}^i.$$

Объекты кручения $\check{T}_{jk}^i$ и кривизны $\check{R}_{jkl}^i$ удовлетворяют уравнениям

$$\check{\Delta} \check{T}_{jk}^i + \check{x}_{[j}^s \delta_{k]}^i \partial_{sp}^q f x_q^t \check{\omega}_t^p = \check{T}_{jk,l}^i \omega^l, \quad (3)$$

$$\check{\Delta} \check{R}_{jkl}^i - \gamma_{j[l}^i \check{x}_{k]}^s \partial_{sp}^q f x_q^u \check{\omega}_u^p = \check{R}_{jkl,s}^i \omega^s, \quad (4)$$

где $f = f(x^i, x_k^j)$. Заменяя в уравнениях (3, 4) слоевые формы на формы связности (см., напр., [12]) $\check{\omega}_j^i = \tilde{\omega}_j^i + \check{\Gamma}_{jk}^i \omega^k$, получим

$$\check{\nabla} \check{T}_{jk}^i = \omega^l \check{\nabla}_l \check{T}_{jk}^i, \quad \check{\nabla} \check{R}_{jkl}^i = \omega^s \check{\nabla}_s \check{R}_{jkl}^i.$$

Ковариантные дифференциалы $\tilde{\nabla} \tilde{T}_{jk}^i$, $\tilde{\nabla} \tilde{R}_{jkl}^i$ имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \tilde{T}_{jk}^i &= d\tilde{T}_{jk}^i + \tilde{T}_{jk}^l \tilde{\omega}_l^i - \tilde{T}_{lk}^i \tilde{\omega}_j^l - \tilde{T}_{jl}^i \tilde{\omega}_k^l + \tilde{x}_{[j}^s \delta_{k]}^i \partial_{sp}^q f x_q^t \tilde{\omega}_t^p, \\ \tilde{\nabla} \tilde{R}_{jkl}^i &= d\tilde{R}_{jkl}^i + \tilde{R}_{jkl}^s \tilde{\omega}_s^i - \tilde{R}_{skl}^i \tilde{\omega}_j^s - \tilde{R}_{jls}^i \tilde{\omega}_k^s - \tilde{R}_{jks}^i \tilde{\omega}_l^s - \\ &\quad - \gamma_{j[l}^i x_{k]}^p x_v^q \partial_{pu}^v f \tilde{\omega}_{jq}^u, \end{aligned}$$

а ковариантные производные $\tilde{\nabla}_l \tilde{T}_{jk}^i$, $\tilde{\nabla}_s \tilde{R}_{jkl}^i$ выражаются по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_l \tilde{T}_{jk}^i &= \tilde{T}_{jk,l}^i - \tilde{T}_{jk}^s \tilde{\Gamma}_{sl}^i + \tilde{T}_{sk}^i \tilde{\Gamma}_{jl}^s + \tilde{T}_{js}^i \tilde{\Gamma}_{kl}^s - \tilde{x}_{[j}^s \delta_{k]}^i \partial_{sp}^q f x_q^t \tilde{\Gamma}_{tl}^p, \\ \tilde{\nabla}_s \tilde{R}_{jkl}^i &= \tilde{R}_{jkl,s}^i - \tilde{R}_{jkl}^p \tilde{\Gamma}_{ps}^i + \tilde{R}_{pkl}^i \tilde{\Gamma}_{js}^p + \tilde{R}_{jpl}^i \tilde{\Gamma}_{ks}^p + \tilde{R}_{jkp}^i \tilde{\Gamma}_{ls}^p + \\ &\quad + \tilde{\Gamma}_{qs}^u \gamma_{j[l}^i x_{k]}^p x_v^q \partial_{pu}^v f. \end{aligned}$$

Для компонент объекта связности справедливо разложение [6; 9]

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^i = \gamma_{jk}^i - \tilde{x}_{jk}^i,$$

где $\gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i(x^l, x_q^p)$ — тензор деформации от канонической аффинной связности $\tilde{\Gamma}_{jk}^i = -\tilde{x}_{jk}^i$ к произвольной связности $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$. В [8] показано, что слоевые координаты 2-го порядка $\tilde{x}_{jk}^i$ полусимметричны (см.: [5; 18; 19; 27]); кроме того, они удовлетворяют равенству $\tilde{x}_{[jk]}^i = -N_{jk}^i$, где $N_{jk}^i = \tilde{x}_{[j}^l \delta_{k]}^i \partial_l f$ — это кручение канонической связности. Указанное разложение позволяет свести объекты связности, кручения и кривизны, не являющиеся тензорами, к тензору γ_{jk}^i , слоевым координатам 1-го x_j^i и 2-го $\tilde{x}_{jk}^i$ порядков, а также функции f , задающей деформацию (искривление) дифференциалов. Объекты кручения $\tilde{T}_{jk}^i$ и кривизны $\tilde{R}_{jkl}^i$ выражаются следующим образом [7]:

$$\frac{1}{2} \tilde{T}_{jk}^i = \gamma_{[jk]}^i + N_{jk}^i, \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} \tilde{R}_{jkl}^i = \partial_s \gamma_{j[k}^i x_{l]}^s - \gamma_{js}^i N_{kl}^s - \gamma_{j[k}^s \gamma_{l]s}^i. \quad (6)$$

Замечание. Из (4, 6) следует, что для нулевого тензора γ_{jl}^i кривизна $\check{R}_{jkl}^i$ становится тензором, причем нулевым. Из (3) видно, что кручение $\check{T}_{jk}^i$ не является тензором и не обращается в нуль (см. также, напр., [21; 24]). В работе [1] рассматривается связность в максимальном фактор-расслоении над пространством центрированных плоскостей, которая всегда с кручением, так как построенные квазитензоры S' , S'' и тензор кручения S''' нельзя обратить в нуль.

Используя (5, 6), найдем тождества Риччи и Бианки, которыми удовлетворяют кручения и кривизна.

Действуя на обе части уравнения (5) внешним дифференциалом $\check{D}$, получим

$$\begin{aligned}\check{D}^2 \omega^i &= \frac{1}{2} \check{\nabla} \check{T}_{jk}^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\check{T}_{sl}^i \check{T}_{jk}^s - \check{R}_{jkl}^i + \gamma_{tl}^p x_{[j}^s \delta_{k]}^i x_q^t \partial_{sp}^q f \right) \omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l + \\ &+ \frac{1}{2} \left(x_{[j}^s \delta_{k]}^i \partial_{sp}^l f \right) dx_l^p \wedge \omega^j \wedge \omega^k.\end{aligned}$$

Учитывая выражение ковариантного дифференциала, получим

$$\begin{aligned}\check{D}^2 \omega^i &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\check{\nabla}_l \check{T}_{jk}^i + \check{T}_{sj}^i \check{T}_{kl}^s - \check{R}_{jkl}^i + x_{[j}^s \delta_{k]}^i x_q^t \gamma_{tl}^p \partial_{sp}^q f \right) \omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l + \\ &+ \frac{1}{2} \left(x_{[j}^s \delta_{k]}^i \partial_{sp}^l f \right) dx_l^p \wedge \omega^j \wedge \omega^k.\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$M_{jkl}^i = \check{\nabla}_{[l} \check{T}_{jk]}^i + \check{T}_{s[j}^i \check{T}_{kl]}^s - \check{R}_{[jkl]}^i + \gamma_{t[l}^p x_j^s \delta_{k]}^i x_q^t \partial_{sp}^q f.$$

Поскольку каждое слагаемое в выражении M_{jkl}^i кососимметрично по двум индексам, входящим в группу индексов j, k, l , по которым производится альтернирование, то альтернирование можно заменить циклированием. Следовательно,

$$M_{jkl}^i = \check{\nabla}_{\{l} \check{T}_{jk\}}^i + \check{T}_{s\{j}^i \check{T}_{kl\}}^s - \check{R}_{\{jkl\}}^i + \gamma_{t\{l}^p x_j^s \delta_{k\}}^i x_q^t \partial_{sp}^q f.$$

Тогда

$$\tilde{D}^2 \omega^i = \frac{1}{2} M_{jkl}^i \omega^j \wedge \omega^k \wedge \omega^l + \frac{1}{2} x_{[j}^s \delta_{k]}^i \partial_{sp}^l f dx_l^p \wedge \omega^j \wedge \omega^k.$$

Равенство $M_{jkl}^i = 0$ является тождеством, что легко показать, используя выражения (5, 6) для объектов кручения и кривизны с помощью тензора деформации γ_{jk}^i .

Аналог тождества Риччи $M_{jkl}^i = 0$, то есть

$$\tilde{\nabla}_{\{l} \tilde{T}_{jk\}}^i + \tilde{T}_{s\{j}^i \tilde{T}_{kl\}}^s - \tilde{R}_{\{jkl\}}^i + \gamma_{t\{l}^p x_{[j}^s \delta_{k]}^i x_q^t \partial_{sp}^q f = 0, \quad (7)$$

приводит выражение для $\tilde{D}^2 \omega^i$ к виду

$$\tilde{D}^2 \omega^i = \left(\frac{1}{2} x_{[j}^s \delta_{k]}^i \partial_{sp}^l f \right) dx_l^p \wedge \omega^j \wedge \omega^k. \quad (8)$$

Выполнение тождеств не влечет за собой равенство нулю второго дифференциала $\tilde{D}^2 \omega^i$ только вдоль линии на многообразии $\tilde{X}_m$.

Для канонической связности $\overset{c}{\tilde{\Gamma}}_{jk}^i = -\tilde{\chi}_{jk}^i$ имеем

$$\gamma_{tl}^p = 0, \quad \tilde{T}_{jk}^i = N_{jk}^i, \quad \tilde{R}_{jkl}^i = 0,$$

поэтому (7) имеет вид классического тождества Риччи для плоской связности

$$\tilde{\nabla}_{\{l} \tilde{T}_{jk\}}^i + \tilde{T}_{s\{l}^i \tilde{T}_{jk\}}^s = 0. \quad (9)$$

Объект $M_{jkl}^i = \tilde{\nabla}_{\{l} \tilde{T}_{jk\}}^i + \tilde{T}_{s\{l}^i \tilde{T}_{jk\}}^s$ является тензором, и его обращение в нуль инвариантно. При этом выражение

$$\overset{o}{\tilde{D}^2} \omega^i = \left(\frac{1}{2} x_{[j}^s \delta_{k]}^i \partial_{sp}^l f \right) dx_l^p \wedge \omega^j \wedge \omega^k$$

обращается в нуль вдоль любой линии ρ на многообразии $\tilde{X}_m$. Такой же вид имеет второй дифференциал в простой (полу-симметрической) связности $\overset{N}{\tilde{\Gamma}}_{jk}^i$.

Замечание. Канонической связность $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i = -\check{x}_{jk}^i$, в отличие от связности Леви-Чивиты, имеет нулевую кривизну и ненулевое кручение. Связность Вайценбека (см., напр., [17]) также имеет нулевую кривизну и ненулевое кручение, причем кручение является объектом неголономности подвижного репера. Кручение канонической связности также совпадает с антисимметрией координат $\check{x}_{[jk]}^i = -N_{jk}^i$.

Действуя на обе части уравнения (2) внешним дифференциалом $\check{D}$, получим

$$\check{D}^2 \check{\omega}_j^i = \frac{1}{2} \left(\check{\nabla} \check{R}_{jk}^i + \gamma_{js}^i x_{[k}^p \delta_{l]}^s x_v^q \partial_{pu}^v f \check{\omega}_{jq}^u - \check{R}_{jkp}^i \check{T}_{ls}^p \omega^s \right) \wedge \omega^k \wedge \omega^l.$$

Учитывая выражение ковариантного дифференциала, находим

$$\begin{aligned} \check{D}^2 \check{\omega}_j^i &= \frac{1}{2} \left(\check{\nabla}_s \check{R}_{jk}^i - \check{R}_{jkp}^i \check{T}_{ls}^p - \gamma_{j[l}^i x_{k]}^p x_v^q \gamma_{qs}^u \partial_{pu}^v f \right) \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^s - \\ &\quad - \frac{1}{2} \gamma_{js}^i x_{[k}^p \delta_{l]}^s \partial_{pu}^v f dx_v^u \wedge \omega^k \wedge \omega^l. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$M_{jkl}^i = \check{\nabla}_{\{s} \check{R}_{|j|kl}^i + \check{R}_{jp\{k}^i \check{T}_{ls}^p - \gamma_{j\{[l}^i x_{k]}^p \gamma_{|q|s}^u x_v^q \partial_{pu}^v f,$$

тогда

$$\check{D}^2 \check{\omega}_j^i = \frac{1}{2} M_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^s - \frac{1}{2} \left(\gamma_{j[l}^i x_{k]}^p \partial_{pu}^v f \right) dx_v^u \wedge \omega^k \wedge \omega^l.$$

Аналог тождества Бианки $M_{jkl}^i = 0$, то есть

$$\check{\nabla}_{\{s} \check{R}_{|j|kl}^i + \check{R}_{jp\{k}^i \check{T}_{ls}^p - \gamma_{j\{[l}^i x_{k]}^p \gamma_{|q|s}^u x_v^q \partial_{pu}^v f = 0, \quad (10)$$

приводит выражение для $\check{D}^2 \check{\omega}_j^i$ к виду

$$\check{D}^2 \check{\omega}_j^i = -\frac{1}{2} \gamma_{j[l}^i x_{k]}^p \partial_{pu}^v f dx_v^u \wedge \omega^k \wedge \omega^l. \quad (11)$$

Замечание. В работе [2] рассматривается геометрическое доказательство тождества Бианки.

Для канонической связности $\gamma_{tl}^p = 0$, $\check{T}_{jk}^i = N_{jk}^i$, $\check{R}_{jkl}^i = 0$ равенство (10) имеет вид классического тождества Бианки плоской связности

$$\check{\nabla}_{\{s} \check{R}_{|j|kl}^i = 0, \quad (12)$$

причем

$$\check{D}^2 \check{\omega}_j^i = 0,$$

поскольку $\gamma_{jk}^i = 0$.

Найденные тождества (7, 10) являются обобщенными тождествами Бианки для кручения и кривизны рассматриваемой связности $\check{\Gamma}_{jk}^i$. При этом второй дифференциал (8) базисных форм ω^i и второй дифференциал (11) форм связности $\check{\omega}_j^i$ не равны нулю. В случае канонической связности тождества (7, 10) принимают классический вид (9, 12).

Замечание. В работе [20, р. 85] представлен матричный способ выражения обобщенных тождеств Бианки в терминах миноров коэффициентов ковариантно замкнутых дифференциальных форм со значениями в векторном расслоении. Также обобщенные тождества Бианки рассматриваются, например, в [3; 4; 11, с. 28; 13]. В [22] вводятся обобщенные тождества Бианки в модели модифицированной гравитации с динамическим кручением, с использованием возмущения связности. В [14] показано, что в общем случае в обобщенном пространстве Вейля первое тождество Бианки не выполняется. Оно имеет место, если обобщенное пространство Вейля обладает полусимметрической связностью.

Список литературы

1. Белова О. О. 1. Кручение групповой подсвязности в пространстве центрированных плоскостей // ДГМФ. 2012. Вып. 43. С. 15—22.

2. *Борисов Ю. Ф.* Геометрическое доказательство тождества Бианки // Математические структуры и моделирование, 2000. Вып. 6. С. 21—28.

3. *Вагнер В.* Обобщение тождеств Риччи и Бианки для связности в составном многообразии // ДАН СССР. 1945. Т. XLVI, №8. С. 335—338.

4. *Манов С.* О тензорах энергии-импульса для полевых теорий в пространствах с аффинной связностью и метрикой. Обобщенные тождества Бианки и различные виды тензоров энергии-импульса. Дубна, 1991.

5. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

6. *Полякова К. В.* Канонические аффинные связности первого и второго порядков // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2021. Т. 203. С. 71—83. doi: 10.36535/0233-6723-2021-203-71-83.

7. *Полякова К. В.* О связности, кручение и кривизна которой не являются тензорами // ДГМФ. 2023. Вып. 54 (2). С. 29—44.

8. *Полякова К. В.* Аналогии симметрической и плоской связностей с нетензорами кручения и кривизны // ДГМФ. 2024. №55 (2). С. 78—95. <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-6>.

9. *Рыбников А. К.* Об обобщенных аффинных связностях второго порядка // Изв. вузов. Математика. 1983. №1. С. 73—80.

10. *Солодов Н. В.* Бивариантные когомологии с симметриями : дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2003.

11. *Шарыгин Г. И.* Геометрия некоммутативных главных расслоений : дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2001.

12. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий : учеб пособие. Калининград, 1998.

13. *Coimbra A.* Higher curvature Bianchi identities, generalized geometry // Phys. Rev. D. 2019. Vol. 100. Art. №106001. doi: 10.1103/PhysRevD.100.106001.

14. *Çivi G.* On the Bianchi identities in a generalized Weyl space // Second International Conference on Geometry, integrability and Quantization, June 7—15, 2000, Varna, Bulgaria. Sofia, 2001. P. 151—155.

15. *Dotsenko V., Shadrin S., Vallette B.* Maurer — Cartan Methods in Deformation Theory — The Twisting Procedure // London Math. Soc. Lecture Note. Ser. 488. Cambridge, 2024.

16. *Dotsenko V., Shadrin S., Vallette B.* Maurer — Cartan methods in deformation theory: the twisting procedure. arXiv: 2212.11323 [math.QA].
17. *Fernandez O.E., Bloch A.M.* The Weitzenböck connection and time reparameterization in nonholonomic mechanics // J. of Math. Phys. 2011. Vol. 52. Art. №012901.
18. *Friedman A., Schoaten J.A.* Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragung // Math. Zeitschrift. 1924. Vol. 21. S. 211—223.
19. *Golab S.* On semi-symmetric and quarter-symmetric metric linear connection // Tensor N. S. 1975. Vol. 29. P. 249—254.
20. *Kahouadji N.* Conservation laws and generalized isometric embeddings : Doctoral thesis. Université Paris-Diderot — Paris VII, 2009. URL: <https://theses.hal.science/tel-00427033v1> (дата обращения: 30.04.2025).
21. *Nieh H.T.* Torsional topological invariant // International J. of Modern Physics A. 2007. Vol. 22, №29. P. 5237—5244.
22. *Nikiforova V.* On the stability of self-accelerating Universe in modified gravity with dynamical torsion. arXiv: 1705.00856v2 [hep-th] 2 Nov 2017.
23. *Petrova L.* Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations, Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory, Interpretation of the Einstein Equation // Axioms. 2021. Vol. 10, №46. <https://doi.org/10.3390/axioms10020046>.
24. *Wanas M.I., Hassan H.A.* Torsion and problems of standard cosmology. arXiv: 1209.6218v3 [gr-qc] 7 Nov 2012.
25. *Witten E.* Supersymmetry and Morse theory // J. Differ. Geom. 1982. Vol. 17, №4. P. 661—692.
26. *Witten E.* A new look at the path integral of quantum mechanics. arXiv: 1009.6032v1 [hep-th] 30 Sep 2010.
27. *Yano K.* On semi-symmetric metric connection // Rev. Roumaine de Mathématique Pures et Appliquées. 1970. Vol. 15. P. 1579—1586.

Для цитирования: Полякова К.В. Обобщенные тождества Риччи и Бианки для связности с нетензорами кручения и кривизны // ДГМФ. 2025. № 56. С. 107—118. <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-9>.



MSC 2010: 53B05, 53C05, 58A10

K. V. Polyakova 

Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo Str., Kaliningrad, 236016, Russia
polyakova_@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2025-56-9

Generalized Ricci and Bianchi identities for a connection with torsion non-tensor and curvature non-tensor

Submitted on May 2, 2025

A manifold is considered whose structure equations are constructed using a deformation of the exterior differential. The torsion and curvature objects of the affine connection on this manifold are not tensors. The curvature object is a tensor, and it is vanishing, only for a canonical connection. The torsion object coincides with the antisymmetry of fiber coordinates and it is non-vanishing even for the canonical connection. Unlike the torsion-free Levi-Civita connection, the canonical connection has vanishing curvature and non-vanishing torsion.

Generalized Ricci and Bianchi identities are constructed for curvature and torsion of the affine connection on this manifold. However, the repeated deformed differential for the basis forms and connection forms vanishes only along a line on the manifold. For the canonical connection, these identities take on a classical form. Moreover, in this case, the repeated deformed differential for the connection forms is identically equal to zero, and the repeated deformed differential for the basis forms vanishes only along the line on the manifold.

Keywords: Ricci and Bianchi identities, torsion and curvature objects, semi-symmetric connection, canonical connection

References

1. Belova, O. O. 1. Torsion of the group subconnection in the space of the centered planes. DGMF, 43, 15—22 (2012).

2. *Borisov, Yu. F.*: Geometric proof of the Bianchi identity. *Mathematical structures and modeling*, 6, 21—28 (2000).
3. *Vagner, V. V.* Generalization of Ricci and Bianchi identities for connection in a composite manifold. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, XLVI (8), 335—338 (1945).
4. *Manov, S.*: On the energy-momentum for field theories in spaces with affine connection and metric, Generalized Bianchi identities and different energy-momentum tensors. *JINR, Dubna* (1991).
5. *Norden, A. P.*: Spaces of affine connection. Moscow (1976).
6. *Polyakova, K. V.*: Canonical affine connections of the first and second orders. *Geometry, Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Sovrem. Math. and its App. Theme Reviews*, 203, 71—83 (2021).
7. *Polyakova, K. V.*: On a connection with a torsion non-tensor and a curvature non-tensor. *DGMF*. 54 (2), 29—44 (2023).
8. *Polyakova, K. V.*: Analogues of torsion-free and curvature-free connections with a torsion non-tensor and a curvature non-tensor. *DGMF*, 55 (2), 78—95 (2024). <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-2-6>.
9. *Rybnikov, A. K.*: Second-order generalized affine connections. *Soviet Math. (Izvestia Vuzov Math.)*, 27:1, 84—93 (1983).
10. *Solodov, N. V.*: Bivariant cohomology with symmetries. PhD thesis. Moscow, 2003.
11. *Sharygin G. I.* Geometry of non-commutative principal bundle. PhD thesis. Moscow (2001).
12. *Shevchenko Yu. I.* Clothings of holonomic and non-holonomic smooth manifolds. Kaliningrad (1998).
13. *Coimbra, A.* Higher curvature Bianchi identities, generalized geometry. *Physical review D*, 100, 106001 (2019). 10.1103/PhysRevD.100.106001.
14. *Çivi, G.*: On the Bianchi identities in a generalized Weyl space. Second International Conference on Geometry, integrability and Quantization, June 7—15, 2000, Varna, Bulgaria. Coral Press, Sofia, 151—155 (2001).
15. *Dotsenko, V., Shadrin, S., Vallette, B.*: Maurer — Cartan Methods in Deformation Theory — The Twisting Procedure. *London Math. Soc. Lecture Note, Ser. 488*. Cambridge University Press, Cambridge (2024).
16. *Dotsenko, V., Shadrin, S., Vallette, B.*: Maurer — Cartan methods in deformation theory: the twisting procedure. arXiv: 2212.11323 [math.QA].

17. *Fernandez, O. E., Bloch, A. M.*: The Weitzenböck connection and time reparameterization in nonholonomic mechanics. *J. Math. Phys.*, 52, 012901 (2011).

18. *Friedman, A., Schoaten, J. A.*: Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragung. *Math. Zeitschrift*, 21, 211—223 (1924).

19. *Golab, S.*: On semi-symmetric and quarter-symmetric metric linear connection. *Tensor N. S.*, 29, 249—254 (1975).

20. *Kahouadji, N.*: Conservation laws and generalized isometric embeddings. *Mathematics [math]*. Université Paris-Diderot — Paris VII (2009).

21. *Nieh, H. T.*: Torsional topological invariant. *International Journal of Modern Physics A*, 22:29, 5237—5244 (2007).

22. *Nikiforova, V.*: On the stability of self-accelerating Universe in modified gravity with dynamical torsion. arXiv:1705.00856v2 [hep-th] 2 Nov 2017.

23. *Petrova, L.*: Evolutionary Relation of Mathematical Physics Equations, Evolutionary Relation as Foundation of Field Theory, Interpretation of the Einstein Equation. *Axioms*, 10, 46 (2021). <https://doi.org/10.3390/axioms10020046>.

24. *Wanas, M. I., Hassan, H. A.*: Torsion and problems of standard cosmology. arXiv:1209.6218v3 [gr-qc] 7 Nov 2012.

25. *Witten, E.*: Supersymmetry and Morse theory. *J. Differential Geom.* 17:4, 661—692 (1982).

26. *Witten, E.*: A new look at the path integral of quantum mechanics. 78 p. arXiv:1009.6032v1 [hep-th] 30 Sep 2010

27. *Yano, K.*: On semi-symmetric metric connection. *Revue Roumaine de Mathématique Pures et Appliquées*, 15, 1579—1586 (1970).

For citation: Polyakova, K. V.: Generalized Ricci and Bianchi identities for a connection with torsion non-tensor and curvature non-tensor. *DGMF*, 56, 107—118 (2025). <https://doi.org/10.5922/0321-4796-2025-56-9>.

