8. *Chen B.Y.* Geometry of submanifolds. New York, 1973.

A. Chakmazyan

ABOUT SEMISYMMETRIC HYPERSURFACES OF AFFINE SPACE

Using the method of exterior forms equipped hypersurface M_n in (n+1)-dimensional affine space A_{n+1} is studied. It's proved that equipment induces connection of the semisymmetric submanifold on M_n if and only if $h_{(ij} h_{k)m} H^m_l - h_{(ij} h_{l)m} H^m_k = 0$, where h_{ij} are coefficients of the second fundamental form on M_n. Moreover if the tangentially nondegenerate hypersurface in A_{n+1} is equipped and all normales of this hypersurface contain the same point (central equipment) or all these normals are parallel to the same vector (trivial equipment) then this equipment induces the geometry of semisymmetric submanifold on M_n, the tangent connection on M_n is equiprojective when $H^m_l \neq 0$ and hypersurface is an affine hyperplane when $H^m_l = 0$.

УДК 514.76

Ю.И. Шевченко

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ЦЕНТРОПРОЕКТИВНАЯ СВЯЗНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ КАРТАНА

Рассмотрено каноническое пространство проективной связности Картана со структурными уравнениями, являющимися уравнениями специального расслоения центропроективных реперов. Задание связности в этом расслоении привело к пространству центропроективной связности. Найдены дифференциальные сравнения для

компонент тензора центропроективной кривизны, содержащего тензор аффинной кривизны. Использованы тензоры кручения проективной связности Картана, ассоциированных центропроективной и аффинной связностей, причем для последней определены тензоры формального и реального кручения.

Структурные уравнения пространства проективной связности Картана $P_{n,n}$, обобщающие соответствующие уравнения пространства аффинной связности, имеют вид [1, с. 234; 2, с. 176—177]

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + S^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k \quad \left(i, j, k, m, p = \overline{1, n}\right); \tag{1}$$

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \delta^i_j \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + R^{\ i}_{jkm}\omega^k \wedge \omega^m; \tag{2}$$

$$D\omega_i = \omega^j_i \wedge \omega_j + R_{ijk}\omega^i \wedge \omega^k, \tag{3}$$

причем компоненты объекта кручения-кривизны R= = { $S^i_{jk}, R^{\ i}_{jkm}, R_{ijk}$ } антисимметричны по двум последним нижним индексам: $S^i_{(jk)} = 0$, $R^{\ i}_{j(km)} = 0$, $R_{i(jk)} = 0$. В каноническом случае они удовлетворяют дифференциальным сравнениям [3]

$$\Delta S^i_{jk} \equiv 0, \ \ \Delta R^{\ i}_{jkm} - \delta^i_j S^p_{km}\omega_p - S^i_{km}\omega_j \equiv 0, \ \ \Delta R_{ijk} + R^{\ m}_{ijk}\omega_m \equiv 0, \tag{4}$$

где символ ≡ означает сравнение по модулю базисных форм ω^i, а дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta S^i_{jk} = dS^i_{jk} + S^m_{jk}\omega^i_m - S^i_{mk}\omega^m_j - S^i_{jm}\omega^m_k.$$

Замечание. Структурные уравнения (1—3) показывают, что с точки зрения расслоений пространство проективной связности Картана не является (см. напр., [2, с. 167]) пространством со связностью.

Запишем структурные уравнения (1; 2) в следующем виде:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \Omega^i_j, \tag{1$'$}$$

$$D\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge (\omega^i_{jk} + R^{\ i}_{jkm}\omega^m); \tag{2$'$}$$

$$\Omega^i_j = \omega^i_j + S^i_{jk}\omega^k, \ \ \omega^i_{jk} = -\delta^i_j\omega_k - \delta^i_k\omega_j. \tag{5}$$

Уравнения (1′) являются структурными уравнениями Лаптева [4] некоторого n-мерного гладкого многообразия V_n, которое назовем базой пространства проективной связности $P_{n,n}$. Структурные уравнения (1′,2′,3) с учетом обозначения (5_1) показывают, что над базой V_n имеется расслоение касательных центропроективных (коаффинных) реперов $G(V_n)$, типовым слоем которого является центропроективная группа $G = GA^*(n)$, $\dim G = n(n+1)$. Группа G действует в касательном центропроективном n-пространстве P^*_n, полученном проективизацией [5] касательного линейного пространства T_n к многообразию V_n в фиксированной точке. Отметим, что пространство $P_{n,n}$ является центропроективным многообразием [5], а расслоение коаффинных реперов $G(V_n)$ порождает фактор-расслоение линейных реперов $L_{n^2}(V_n)$ со структурными уравнениями (1′,2′), типовым слоем которого является линейная фактор-группа $L_{n^2} = GL(n)$, действующая в линейном пространстве T_n.

Зададим центропроективную связность в расслоении $G(V_n)$ способом Лаптева [6]. Рассмотрим преобразование слоевых форм ω^i_j, ω_i с помощью базисных форм ω^k:

$$\widetilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k, \quad \widetilde{\omega}_i = \omega_i - \Gamma_{ij}\omega^j, \tag{6}$$

где коэффициенты $\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}$ являются некоторыми функциями на расслоении $G(V_n)$. Дифференцируем формы (6) внешним образом:

$$D\widetilde{\omega}^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge (d\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{jm}\omega^m_k + \omega^i_{jk}) + (R^i_{jkm} - \Gamma^i_{jp}S^p_{km})\omega^k \wedge \omega^m;$$

$$D\widetilde{\omega}_i = \omega^j_i \wedge \omega_j + \omega^j \wedge (d\Gamma_{ij} - \Gamma_{ik}\omega^k_j) + (R_{ijk} - \Gamma_{im}S^m_{jk})\omega^j \wedge \omega^k.$$

Подставим в первые слагаемые выражения форм ω^i_j, ω_i из равенств (6):

$$D\tilde\omega_j^i = \tilde\omega_j^k \wedge \tilde\omega_k^i + \tilde\omega_j^p \wedge \Gamma_{pm}^i\omega^m + \Gamma_{jk}^p\omega^k \wedge \tilde\omega_p^i + \Gamma_{jk}^p\omega^k \wedge \Gamma_{pm}^i\omega^m +$$
$$+ \omega^k \wedge (d\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{jp}^i\omega_k^p + \omega_{jk}^i) + (R^i_{jkm} - \Gamma_{jp}^i S_{km}^p)\omega^k \wedge \omega^m,$$
$$D\tilde\omega_i = \tilde\omega_i^j \wedge \tilde\omega_j + \tilde\omega_i^m \wedge \Gamma_{mk}\omega^k + \Gamma_{ij}^m\omega^j \wedge \tilde\omega_m + \Gamma_{ij}^m\omega^j \wedge \Gamma_{mk}\omega^k +$$
$$+ \omega^j \wedge (d\Gamma_{ij} - \Gamma_{ik}\omega_j^k) + (R_{ijk} - \Gamma_{im}S_{jk}^m)\omega^j \wedge \omega^k.$$

Во 2-х и 3-х слагаемых вернемся к формам ω_j^i, ω_i:

$$\begin{aligned} D\tilde\omega_j^i &= \tilde\omega_j^k \wedge \tilde\omega_k^i + \omega^k \wedge (\Delta\Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i) + (R^i_{jkm} - \Gamma_{jp}^i S_{km}^p - \Gamma_{jk}^p\Gamma^i_{pm})\omega^k \wedge \omega^m, \\ D\tilde\omega_i &= \tilde\omega_i^j \wedge \tilde\omega_j + \omega^j \wedge (\Delta\Gamma_{ij} + \Gamma_{ij}^k\omega_k) + (R_{ijk} - \Gamma_{im}S_{jk}^m - \Gamma_{ij}^m\Gamma_{mk})\omega^j \wedge \omega^k. \end{aligned} \tag{7}$$

Согласно теореме Картана — Лаптева [6] зададим поле объекта центропроективной связности $\{\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ij}\}$ на базе V_n:

$$\Delta\Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i\omega^m, \quad \Delta\Gamma_{ij} + \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ijk}\omega^k. \tag{8}$$

Тогда уравнения (7) примут вид

$$D\tilde\omega_j^i = \tilde\omega_j^k \wedge \tilde\omega_k^i + \mathfrak{R}^i_{jkm}\omega^k \wedge \omega^m, \quad D\tilde\omega_i = \tilde\omega_i^j \wedge \tilde\omega_j + \mathfrak{R}_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k, \tag{9}$$

где компоненты объекта центропроективной кривизны $\{\mathfrak{R}^i_{jkm}, \mathfrak{R}_{ijk}\}$ выражаются по формулам

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^i_{jkm} &= R^i_{jkm} - \Gamma^i_{jp}S^p_{km} + \Gamma^i_{j[km]} - \Gamma^p_{j[k}\Gamma^i_{pm]}, \\ \mathfrak{R}_{ijk} &= R_{ijk} - \Gamma_{im}S^m_{jk} + \Gamma_{i[jk]} - \Gamma^m_{i[j}\Gamma_{mk]}, \end{aligned} \tag{10}$$

причем по крайним индексам в квадратных скобках производится альтернирование.

Продифференцируем уравнения (8) внешним образом:

$$(\Delta\Gamma^i_{jkm} + \Gamma^p_{jk}\omega^i_{pm} - \Gamma^i_{pk}\omega^p_{jm} - \Gamma^i_{jp}\omega^p_{km}) \wedge \omega^m = 0,$$
$$(\Delta\Gamma_{ijk} - \Gamma_{im}\omega^m_{jk} - \Gamma_{mj}\omega^m_{ik} + \Gamma^m_{ijk}\omega_m) \wedge \omega^k = 0.$$

Разрешим квадратичные уравнения по лемме Картана, подставим выражения трехиндексных форм (5_2) и запишем результат в виде сравнений

$$\Delta\Gamma^i_{jkm} - \delta^i_m \Gamma^p_{jk}\omega_p + \Gamma^i_{jk}\omega_m + \Gamma^i_{mk}\omega_j + \Gamma^i_{jm}\omega_k \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma_{ijk} + 2\Gamma_{ij}\omega_k + \Gamma_{ik}\omega_j + \Gamma_{kj}\omega_i + \Gamma^m_{ijk}\omega_m \equiv 0.$$

Проальтернируем эти сравнения по двум последним нижним индексам

$$\Delta\Gamma^i_{j[km]} - \delta^i_{[m}\Gamma^p_{jk]}\omega_p + \Gamma^i_{[mk]}\omega_j \equiv 0,$$
$$\Delta\Gamma_{i[jk]} + \Gamma_{i[j}\omega_{k]} + \Gamma_{[kj]}\omega_i + \Gamma^m_{i[jk]}\omega_m \equiv 0. \qquad (11)$$

Теперь найдем сравнения на компоненты (10) с помощью соотношений (4; 8; 11):

$$\Delta\Re^i_{jkm} \equiv 0, \ \Delta\Re_{ijk} + \Re^m_{ijk}\omega_m \equiv 0. \qquad (12)$$

Теорема 1. *Объект кривизны* $\{\Re^i_{jkm}, \Re_{ijk}\}$ *центропроективной связности* $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}\}$ *в расслоении центропроективных реперов $G(V_n)$ над базой V_n канонического пространства проективной связности Картана $P_{n,n}$ является тензором, содержащим подтензор кривизны* $\Re^i_{jkm}$ *аффинной подсвязности* Γ^i_{jk} *в фактор-расслоении касательных линейных реперов* $L_{n^2}(V_n)$.

Внесем формы аффинной подсвязности (6_1) в структурные уравнения (1):

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \tilde{\omega}^i_j + \sum{}^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k; \qquad (13)$$

$$\sum{}^i_{jk} = S^i_{jk} + T^i_{jk}, \ T^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]}. \qquad (14)$$

Альтернируя дифференциальные уравнения (8_1) по нижним индексам с использованием симметрии форм (5_2), запишем результат в виде сравнений

$$\Delta T^i_{jk} \equiv 0. \qquad (15)$$

Назовем T^i_{jk} тензором формального кручения аффинной подсвязности центропроективной связности, ассоциированной с пространством $P_{n,n}$.

По аналогии с формулой (14_2) введем [7] объект $T_{ij} = \Gamma_{[ij]}$, компоненты которого удовлетворяют вытекающим из уравнений (8_2) сравнениям

$$\Delta T_{ij} + T^k_{ij}\omega_k \equiv 0. \qquad (16)$$

Дифференциальные сравнения (15; 16) показывают, что объект $\{T^i_{jk}, T_{ij}\}$ является тензором, который назовем тензором формального кручения ассоциированной центропроективной связности.

Из дифференциальных сравнений (4_1; 15) следует, что компоненты объекта $\sum^i_{jk}$ удовлетворяют сравнениям

$$\Delta \sum{}^i_{jk} \equiv 0. \qquad (17)$$

Определение. Тензор $\sum^i_{jk}$ — сумму (14_1) тензора кручения S^i_{jk} пространства проективной связности Картана $P_{n,n}$ и тензора формального кручения T^i_{jk} аффинной подсвязности Γ^i_{jk} центропроективной связности $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}\}$, ассоциированной с пространством $P_{n,n}$, — назовем тензором реального кручения ассоциированной аффинной подсвязности.

Теорема 2. *Задание центропроективной связности* $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}\}$ *в каноническом пространстве проективной связности Картана* $P_{n,n}$*, представляемом как расслоение центропроективных реперов над его базой — n-мерным гладким многообразием, приводит к ассоциированному пространству центропроективной связности с уравнениями структуры (9; 13), в которые входят тензоры центропроективной кривизны* $\{\Re^i_{jkm}, \Re_{ijk}\}$ *и реального кручения* $\sum^i_{jk}$ *с компонентами (10; 14), удовлетворяющими дифференциальным сравнениям (12; 17).*

Список литературы

1. *Cartan E.* Lecons sur la theorie des espaces a conexion projective. Paris, 1937.

2. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.

3. *Shevchenko Yu.I.* Tensor of affine torsion-curvature of projective Cartan's connection // Избр. вопросы соврем. математики. Калининград, 2005. С. 49—52.

4. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

5. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

6. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—247.

7. *Лемлейн В.Г.* Локальные центропроективные пространства и связности в дифференцируемом многообразии // Литовский математический сборник. 1964. Т. 4. №1. С. 41—132.

Yu. Shevchenko

CENTERPROJECTIVE CONNECTION IN THE SPACE OF PROJECTIVE CARTAN'S CONNECTION

The canonical space of projective Cartan's connection with the structural equations (equations of the special fibering of the centerprojective frames) is considered. The assignment of connection in this fibering was adduced to space of the centerprojective connection. The differential comparisons for the components of the centerprojective curvature tensor, containing the tensor of affine curvature, are found. The torsion tensors of projective Cartan's connection, associated centerprojective and affine connections are used, at that the tensors of formal and real torsion are defined for the affine connection.

УДК 514.75