

УДК 514.75

Б.А. Андреев

(Калининградский государственный университет)

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ НАПРАВЛЕНИЯ И НАПРАВЛЕНИЯ ДАРБУ НОРМАЛИЗОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В точке нормализованной поверхности проективно-аффинного пространства изучаются множества направлений Дарбу и введенных автором характеристических направлений; последние являются обобщениями характеристических направлений теории точечных отображений. В общем случае имеется 3 направления Дарбу и 3 несовпадающих с ним характеристических направления. Доказан ряд предложений, в которых изучаются всевозможные с точки зрения типов характеристических конфигураций случаи расположения указанных троек направлений.

Настоящая работа является продолжением статьи [1] автора, в которой показано, что нормализованная поверхность S проективно-аффинного пространства для каждой точки $P_0 \in S$ порождает отображение $f_{P_0}^S$ аффинно-проективных пространств, к которому применимы понятия теории точечных отображений, в частности такого, как характеристическая конфигурация. Здесь мы продолжаем изучение зависимости между характеристической конфигурацией отображения $f_{P_0}^S$ и множеством направлений Дарбу при $n=2$. Когда не оговорено противное, используются обозначения работы [1].

Разложение отображения $f_{P_0}^S$ в ряд Тейлора в окрестности точки P_0 имеет вид:

$$\eta_i = \Lambda_{ij}y^j + \frac{1}{2}K_{ijk}y^i y^j + \langle 3 \rangle. \quad (1)$$

Можно показать, что после приведения матрицы $[\Lambda_{ij}]$ к единичной система уравнений множества главных точек отображения $f_{P_0}^S$ относительно точки P_0 приводится в однородных координатах к виду:

$$A_{11}(x^1)^2 + A_{22}(x^2)^2 - 2x^1x^0 = 0, \quad 2x^2x^0 = 0, \quad (2)$$

где обозначено $A_{ij} = \Lambda_{1ij}$. Каждая характеристическая прямая соединяет точку $P_0(0,0,1)$ с одной из главных точек. Определяемое тем же объектом $\Gamma_2 = \{\Lambda_{ijk}\}$ уравнение направлений Дарбу (3.4) [1] принимает после преобразований вид:

$$\left(A_{11}(\Lambda^1)^2 + 4A_{22}(\Lambda^2)^2 - 3A_{11}(\Lambda^2)^2 \right) \Lambda^1 = 0. \quad (3)$$

В общем случае в P_0 имеется 3 характеристических направления и 3 направления Дарбу, которые однако не совпадают одни с другим. Обозначим $\kappa = \frac{A_{22}}{A_{11}}$, $k = \frac{\Lambda^2}{\Lambda^1}$, где $A_{11} \neq 0$, $\Lambda^1 \neq 0$. Из (3) получаем

$$k^2 = (3 - 4\kappa)^{-1}. \quad (4)$$

Рассмотрим строение указанных троек направлений в различных случаях.

1) $\kappa < \frac{3}{4}$, тогда $k^2 > 0$. Имеется 3 действительных направления Дарбу. В частности, при $\kappa < 0$, получаем

Предложение 1. Если в P_0 существует 3 действительных характеристических направления, то в этой же точке имеется 3 действительных направления Дарбу.

2) $\kappa > \frac{3}{4}$, тогда $k^2 < 0$. Отсюда при $\kappa > 1$ вытекает

Предложение 2. Если в P_0 существует одно действительное и пара мнимых характеристических направлений, то такое же строение имеет множество направлений Дарбу.

3) **Предложение 3.** При $\kappa = \frac{3}{4}$ все 3 направления Дарбу совпадают с направлением оси $x^1 = 0$, а множество характеристических прямых состоит из оси $x^2 = 0$ и двух мнимых прямых.

4) $\kappa = 0$, $A_{22} = 0$, $A_{11} \neq 0$. Тогда $k = \pm(3)^{-\frac{1}{2}}$. Для удобства формулировок введем метрику $S^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2$. Прямые, имеющие направление Дарбу, будем называть прямыми Дарбу.

Предложение 4. В случае 4) существуют 3 действительные прямые Дарбу, причем все они проходят через вершины правильного шестиугольника, 2 вершины которого находятся на оси $x^1 = 0$. Характеристическая конфигурация при этом состоит из оси $x^2 = 0$ и сдвоенной прямой $x^1 = 0$.

5) $\kappa = 0$, $A_{11} = 0$, $A_{22} \neq 0$. Тогда $k = \pm\sqrt{3}$. Получаем

Предложение 5. В случае 5) существуют 3 действительных прямых Дарбу, причем 2 из них проходят через вершины правильного шестиугольника, 2 вершины которого находятся на оси $x^2 = 0$, а третья прямая совпадает с осью $x^1 = 0$. Характеристическая конфигурация в этом случае состоит из строенной прямой $x^2 = 0$.

б) И, наконец, в случае $\kappa = A_{11} = A_{22} = 0$ любая прямая связки $\{P_0\}$ является и прямой Дарбу и характеристической прямой.

Библиографический список

1. Андреев Б.А. Структуры теории точечных соответствий в геометрии гиперповерхностей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1993. № 24. С. 16 – 23.

B.A. Andreev

CHARACTERISTIC DIRECTIONS AND DARBOUX DIRECTIONS
OF NORMALIZED SURFACE

In the point P_0 of smooth normalized surface of projective-affine space the sets of Darboux directiones are studied. The last ones are the generalizations of characteristic directions of the theory of point mappings. In the general case there exist 3 Darboux directions at the point P_0 and coinciding with them 3 characteristic directions. Some theorems are proved in which every possible ti-pes of characteristic configuratios and corresponding them structures of sets of Darboux directions are investigated.

УДК 514.763.8

Г.А. Банару, М.Б. Банару

*(Смоленский государственный педагогический университет,
Смоленский гуманитарный университет)*

**ОБ УПЛОЩАЮЩИХСЯ 6–МЕРНЫХ ЭРМИТОВЫХ
ПОДМНОГООБРАЗИЯХ АЛГЕБРЫ ОКТАВ**

Доказано, что уплощающиеся 6–мерные эрмитовы подмногообразия алгебры Кэли общего типа линейчаты.

Предметом исследования в настоящей работе являются 6–мерные эрмитовы подмногообразия алгебры Кэли. Напомним [1], что почти эрмитовым называется четномерное многообразие M^{2n} , наделенное римановой метрикой $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ и почти комплексной структурой J , которые согласованы условием

$$\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathcal{N}(M^{2n}).$$