УДК 514.822

***С. Е. Степанов, А. А. Рылов***

*(Финансовая академия при Правительстве РФ, г. Москва)*

**О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА**

В настоящей статье мы возвращаемся к работе [1] одного из авторов для более подробного рассмотрения предложенной там классификации уравнений Эйнштейна.

***Ключевые слова:*** уравнения Эйнштейна, классификация.

## § 1. Уравнения Эйнштейна

В общей теории относительности *пространство-время* представляет собою гладкое четырехмерное многообразие $M$ с метрикой $g$ сигнатуры Лоренца. При этом $g$ интерпретируется как гравитационный потенциал и связана *уравнениями Эйнштейна* $Ric - \frac{1}{2} s\, g = T$ с распределением массы энергии, порождающей гравитационное поле. Здесь $Ric$ — тензор Риччи метрики $g$, $T$ — известный *тензор энергии импульса материи.*

Уравнения Эйнштейна дополняются *законами сохранения* $d^{*}T = 0$, которые выводятся из уравнений Эйнштейна на основании тождеств Бианки $2d^{*}Ric = -d\, s$.

## § 2. Семь классов уравнений Эйнштейна

В [1] было доказано, что на псевдоримановом многообразии $(M, g)$ расслоение $\Omega(M) \subset T^{*}M \otimes S^{2}M$, слой которого в каждой точке $x \in M$ состоит из трилинейных отображений $\Omega : T_x M \to \mathbf{R}$ таких, что $\Omega(X, Y, Z) = \Omega(X, Z, Y)$ и $\sum_{i=1}^{n} \Omega(e_i, e_i, X) = 0$ для произвольных $X, Y, Z$ и ортонормированного базиса $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ пространства $T_x M$, имеет поточечно неприводимое относительно действия псевдоортогональной группы разложение $\Omega(M) = \Omega_1(M) \oplus \Omega_2(M) \oplus \Omega_3(M)$.

Если $(M, g)$ — пространство-время, то $\nabla T \in \Omega(M)$. В результате инвариантным образом выделяются шесть классов уравнений Эйнштейна, для каждого ковариантная производная $\nabla T$ тензора энергии — импульса материи $T$ является сечением инвариантного подрасслоения $\Omega_1(\mathrm{M}), \Omega_2(\mathrm{M})$ или $\Omega_3(\mathrm{M})$ либо их прямых сумм $\Omega_1(M) \oplus \Omega_2(M)$, $\Omega_1(M) \oplus \Omega_3(M)$ или $\Omega_2(M) \oplus \Omega_3(M)$.

## § 3. Класс уравнений $\Omega_1$ и интегралы геодезических

Класс $\Omega_1$ уравнений Эйнштейна выделяется в [1] условием $\delta^* T = 0$, где $\delta^* : S^2 M \to S^3 M$ — симметрический дифференциал. Поскольку $trace_g T = -s$, то из уравнения $\delta^* T = 0$ последует, что $s = const$. В этом случае уравнение $\delta^* T = 0$ принимает вид $\delta^* Ric = 0$. Обратное очевидно.

Если каждое решение $x^k = x^k(s)$ уравнений геодезических на псевдоримановом многообразии $(M, g)$ удовлетворяет условию $a_{ij} \dfrac{dx^i}{ds} \dfrac{dx^j}{ds} = const$ для симметрического тензорного поля $a(a_{ij})$, то говорят, что уравнения геодезических допускают *первый квадратичный интеграл* [2, с. 157—161]. Для этого необходима выполнимость уравнений $\delta^* a = 0$. Тензорное поле $a$ в этом случае называется *тензором Киллинга* [3, с. 560]. В нашем же случае первым квадратичным интегралом уравнений геодезических будет $R_{ij} \dfrac{dx^i}{ds} \dfrac{dx^j}{ds} = const$; а тензор Риччи $Ric(R_{ij})$, следовательно, — тензором Киллинга.

**Теорема 1.** *Уравнения Эйнштейна принадлежат классу* $\Omega_2$ *тогда и только тогда, когда в пространстве-времени уравнения геодезических линий допускают первый квадратичный интеграл вида* $R_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=const$ *для тензора Риччи* $Ric(R_{ij})$ *метрики* $g$.

Теория первых интегралов уравнений геодезических и симметрических тензорных полей Киллинга имеет многочисленные приложения в механике, общей теории относительности и других разделах физики (см., напр.: [3, с. 560—563; 4, с. 443—448]).

## § 4. Класс уравнений $\Omega_2$ и уравнения Янга — Миллса

Класс $\Omega_2$ уравнений Эйнштейна выделяется в [1] условием $d\,T=0$. Рассматривая эти уравнения вместе с уравнениями Эйнштейна, получаем $s=const$ и вследствие этого приходим к *уравнениями Кодацци* $d\,Ric=0$ [5, с. 169]. Из этих уравнений Кодацци следуют уравнения $d\,T=0$.

Рассмотрим $n$-мерное $(n\geq 4)$ конформно плоское псевдориманово многообразие $(M,g)$, для которого выполняются [2, с. 116] уравнения $d\left[Ric-\frac{1}{2(n-1)}s\cdot g\right]=0$. Если предположить, что $s=const$, то получим уравнения $d\,Ric=0$. Следовательно, для конформно плоского пространства-времени с $s=const$ уравнения Эйнштейна принадлежат классу $\Omega_2$, то есть $\nabla T\in\Omega_2(M)$.

На произвольном $n$-мерном псевдоримановом многообразии $(M,g)$ определяется [2, с. 165] *тензор проективной кривизны Вейля* $P$. При $n>2$ обращение в нуль тензора $P$ характеризует многообразия постоянной кривизны [2, с. 166]. Нетрудно усмотреть, что $d^{*}P=-\frac{n-2}{n-1}d\,Ric$ в силу тождества Бианки $d^* R = -d\, Ric$. Будем говорить, что тензор проективной кривизны Вейля *гармоничен*, если $d^* P = 0$. Название объясняется тем, что из условия $d^* P = 0$ автоматически следует тождество Бианки $d\, P = 0$. Таким образом, если тензор $P$ рассматривать как 2-форму $P : \Lambda^2(TM) \to \Lambda^2(TM)$, то последняя будет одновременно замкнута и козамкнута, а следовательно, гармонична [6, с. 240—242]. Условие гармоничности тензора проективной кривизны Вейля $P$ приводит к уравнениям Кодацци $d\, Ric = 0$, которые равносильны условию $d\, T = 0$. Справедлива следующая

**Теорема 2.** *Уравнения Эйнштейна принадлежат классу* $\Omega_2$ *тогда и только тогда, когда тензор проективной кривизны Вейля* $P$ *гармоничен.*

Известно [6, с. 188—189], что связность $\hat{\nabla}$ в главном расслоении $\pi : E \to M$ над псевдоримановом многообразием $(M, g)$ с послойной метрикой $g_E$ называется *полем Янга — Миллса*, если ее кривизна $\hat{R}$ наряду с тождествами Бианки $d\, \hat{R} = 0$ удовлетворяет *уравнению Янга — Миллса* $d^* \hat{R} = 0$. Если рассматривать $E = TM$, $g_E = g$, а связность Леви-Чивита $\nabla$ псевдоримановой метрики $g$ в качестве связности $\hat{\nabla}$, тогда *уравнения Янга — Миллса* $d^* R = 0$ в силу равенств $d^* R = -d\, Ric$ примут вид уравнений Кодацци $d\, Ric = 0$, которые равносильны уравнениям $d\, T = 0$. Справедлива следующая

**Теорема 3.** *Уравнения Эйнштейна принадлежат классу* $\Omega_2$ *тогда и только тогда, когда связность Леви-Чивита* $\nabla$ *метрики* $g$, *рассматриваемая как связность в касательном расслоении, является полем Янга — Миллса.*

Теория Янга — Миллса занимает важное место в современных исследованиях как математиков, так и физиков-теоретиков (см., напр., [7; 8]).

## § 5. Класс уравнений $\Omega_3$ и геодезические отображения

Класс $\Omega_3$ уравнений Эйнштейна выделяется в [1] следующими условиями на тензор Риччи

$$\nabla_k R_{ij} = \frac{1}{18}\left(4\left(\partial_k s\right)g_{ij} + \left(\partial_i s\right)g_{kj} + \left(\partial_j s\right)g_{ik}\right). \qquad (5.1)$$

Известно, что все $n$-мерные $\left(n \geq 2\right)$ псевдоримановы многообразия $\left(M, g\right)$ непостоянной скалярной кривизны $s$, чей тензор Риччи $Ric$ удовлетворяет уравнениям

$$\nabla_k R_{ij} = \frac{n-2}{2(n-1)(n+2)}\left(\frac{2n}{n-2}\left(\partial_k s\right)g_{ij} + \left(\partial_i s\right)g_{kj} + \left(\partial_j s\right)g_{ik}\right), \qquad (5.2)$$

называются *пространствами* $L_n$. Последние были определены Н. С. Синюковым [11, с. 131—132] и представляют собой пример псевдоримановых многообразий непостоянной кривизны, допускающих *нетривиальные геодезические отображения*. Нетрудно проверить, что для $n = 4$ уравнения (5.1) и (5.2) совпадают, а потому пространства-времена, для которых $T \in \Omega_3$, являются пространствами Синюкова $L_n$. Справедлива

**Теорема 4.** *Уравнения Эйнштейна принадлежат классу* $\Omega_2$ *тогда и только тогда, когда пространство-время является пространством Синюкова* $L_4$.

## § 6. Три других класса уравнений Эйнштейна

Класс уравнений Эйнштейна $\Omega_1 \oplus \Omega_2$ выделяется следующим условием: $\nabla\left(trace_g T\right) = 0$ — или равносильным ему: $s = const$. Будет справедливой следующая

**Теорема 5.** *Уравнения Эйнштейна принадлежат классу* $\Omega_1 \oplus \Omega_2$ *тогда и только тогда, когда метрика g пространства-времени имеет постоянную скалярную кривизну.*

Класс уравнений Эйнштейна $\Omega_2 \oplus \Omega_3$ выделяется условием $d\left[T - 3^{-1}\left(trace_g T\right)g\right] = 0$. Для получения аналитической характеристики обратимся к тензору конформной кривизны Вейля $W$ [2, с. 115]. На произвольном псевдоримановом многообразии $(M, g)$ размерности $n \geq 3$ этот тензор подчиняется уравнению [9, с. 115]

$$d^*W = -\frac{n-3}{n-2} d\left[ Ric - \frac{1}{2(n-1)} s \cdot g \right]. \qquad (6.1)$$

Тензор конформной кривизны Вейля *гармоничен*, если $d^*W = 0$. Действительно, из условия $d^*W = 0$ вытекает [9, с. 115] тождество Бианки $dW = 0$. И если тензор конформной кривизны Вейля $W$ рассматривать как 2-форму $W : \Lambda^2(TM) \to \Lambda^2(TM)$, то последняя будет одновременно замкнута и козамкнута, а следовательно, гармонична.

Имеем $T - 3^{-1}\left(trace_g T\right)g = Ric - 6^{-1} s \cdot g$, тогда в пространстве-времени в силу (6.1) условие $\nabla T \in \Omega_2(M) \oplus \Omega_3(M)$ равносильно требованию $d^*W = 0$. Доказана следующая

**Теорема 6.** *Уравнения Эйнштейна принадлежат классу* $\Omega_2 \oplus \Omega_3$ *тогда и только тогда, когда тензор конформной кривизны $W$ пространства-времени гармоничен.*

Примером пространства-времени с $\nabla T \in \Omega_2(M) \oplus \Omega_3(M)$ служит конформно плоское пространство-время, поскольку для него $W \equiv 0$ [9, с. 116].

Класс $\Omega_1 \oplus \Omega_3$ характеризуется условием $\delta^*\left[T - 6^{-1}\left(trace_g T\right)g\right] = 0$, которое на основании равенства $T - 6^{-1}\left(trace_g T\right)g = Ric - 3^{-1} s \cdot g$ принимает вид следующих дифференциальных уравнений

$$\delta^*\left(Ric - 3^{-1} s \cdot g\right) = 0. \qquad (6.2)$$

В этом случае $R_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}=const$ будет первым квадратичным интегралом уравнений изотропных геодезических $x^k=x^k(s)$ пространства-времени. При этом на многообразии Синюкова $L_4$ уравнения (6.2) обратятся в тождества.

## *Список литературы*

1. *Степанов С.Е.* О групповом подходе к изучению уравнений Эйнштейна и Максвелла //Теоретическая и математическая физика. 1997. Т. 111, №1. С. 32—43.

2. *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия. М., 1948.

3. *Stephani H., Kramer D., MacCallum M.* и др. Exact Solutions of Einstein's Field Equations: Second Edition. Cambridge, 2003.

4. *Ivancevic V.G., Tvancevic T.T.* Applied differential geometry: A modern introduction. Word Scientific Publishing C°, 2007.

5. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1978.

6. *Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В.* Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 28: Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР. М., 1988. С. 5—289.

7. *Tafel J.* Null solutions of the Yang — Mills equations // Letters in Math. Physics. 1986. Vol. 12, № 2. P. 167—178.

8. *Sibner L.M., Sibner R.J., Uhlenbeck K.* Solutions to Yang-Mills equations are not self-dual // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1989. Vol. 86. P. 8610—8613.

9. *Синюков Н.С.* Геодезические отображения римановых пространств. М., 1979.

*S. Stepanov, A. Rylov*

## ON A GEOMETRICAL CLASSIFICATION OF THE EINSTEIN EQUATIONS

In current paper we refer to the paper [1] of one of the authors of the present paper for more detailed investigation of Einstein equations classification that was proposed in the paper [1].