ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14
1983

УДК 514.75

И.И.Баглаев

ПРОСТРАНСТВО ГИПЕРКВАДРИК АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Гиперквадрики проективного пространства P_n можно рассматривать как точки проективного пространства S_N $(N=\frac{1}{2}n(n+3))$. В S_N действует группа $PL(n,R)$ проективных преобразований пространства P_n. Обозначим через Δ_p $(p=0,1,\dots,n-1)$ многообразия вырожденных гиперквадрик ранга $\leq n-p$. Фильтрация $S_N\supset\Delta_0\supset\dots\supset\Delta_{n-1}$ инвариантна относительно $PL(n,R)$ [1], [4]. Пространство S_N будем называть пространством гиперквадрик пространства P_n, а линейные подпространства размерности m пространства P_n - линейными системами гиперквадрик (л.с.гк.) размерности m.

1. Пусть $\bar{A}_n$ расширенное аффинное пространство, полученное из A_n, т.е. $\bar{A}_n=A_n\cup L_0$, где L_0 - несобственная гиперплоскость пространства $\bar{A}_n$. Пару гиперплоскостей, одна из которых является несобственной, будем называть несобственной гиперквадрикой пространства $\bar{A}_n$, а все остальные - собственными. Обозначим пространство гиперквадрик пространства $\bar{A}_n$ через $S_N^{\bar{A}}$, а пространство гиперквадрик пространства A_n через S_N^A. Множество всех несобственных гиперквадрик образует n-плоскость S_n с фиксированной в ней точкой A^{oo} - образом двойной несобственной гиперплоскости. Так как между множеством собственных гиперквадрик пространства $\bar{A}_n$ и множеством всех гиперквадрик пространства A_n существует биекция, то можно рассматривать S_N^A как $S_N^{\bar{A}}\setminus S_n$.

Группа преобразований $\bar{A}(n,R)$ пространства $\bar{A}_n$ оставляет инвариантной фильтрацию $S_N^{\bar{A}}\supset\Delta_0\supset\dots\supset\Delta_{n-1}$, плоскость S_n и точку A^{oo}. В $S_N^{\bar{A}}$ можно ввести расслоение π: $S_N^{\bar{A}}\to S_{N'}$, где $S_{N'}$ - пространство гиперквадрик проективного пространства P_{n-1}, $N'=\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$. Проекция π ставит в соответствие гиперквадрике $Q\in S_N^{\bar{A}}$ квадрику $Q_{n-2}\in S_{N'}$, являющуюся пересечением Q с несобственной гиперплоскостью L_0. В $S_{N'}$ определена фильтрация $S_{N'}\supset\Delta'_0\supset\dots\supset\Delta'_{n-2}$. Рассмотрим многообразие $\delta_s=\pi^{-1}(\Delta'_s)$ $(s=0,1,\dots,n-2)$. Оно состоит из параболоидов ранга $\leq n-s-1$. Следовательно, многообразие δ_s можно рассматривать как конус с вершиной S_n над поверхностью $\Delta'_s\subset S_{N'}$, если рассматривать $S_{N'}$ как одну из плоскостных образующих гиперповерхности Δ_0. Пересечение $\Delta_s\cap\delta_s$ есть множество цилиндров, имеющих $(s+1)$-мерные плоские образующие. Многообразие δ_p содержится в Δ_{p-1}.

2. Линейной системой гиперквадрик B^m размерности m в пространстве $\bar{A}_n$ называем m-плоскость в $S_N^{\bar{A}}$, а линейной системой гиперквадрик размерности m в пространстве A_n - множество всех собственных гиперквадрик л.с.гк. B^m. Все факты, касающиеся л.с.гк. пространства $\bar{A}_n$, легко переносятся на л.с.гк. пространства A_n. Поэтому в п.2 ограничиваемся рассмотрением л.с.гк. пространства $\bar{A}_n$.

Две л.с.гк. B^m и $\tilde{B}^m$ называются эквивалентными, если найдется преобразование, принадлежащее $\bar{A}(n,R)\times PL(m,R)$, которое переводит одну из них в другую. Многообразия $\Gamma^m_p=B^m\cap\Delta_p$ и $\gamma^m_s=B^m\cap\delta_s$ являются соответственно многообразиями вырожденных гиперквадрик и параболоидов, принадлежащих л.с.гк. B^m. Если две л.с.гк. B^m и $\tilde{B}^m$ эквивалентны, то алгебраические поверхности Γ^m_p и $\tilde{\Gamma}^m_p$, γ^m_s и $\tilde{\gamma}^m_s$ проективно эквивалентны на плоскости B^m.

Одномерные л.с.гк. называются пучками гиперквадрик.

Следовательно, пучок гиперквадрик B^1 - это прямая в $S^{\tilde{A}}_{N}$. Прямая B^1 пересекает в общем случае гиперповерхности Δ_0 и δ_0 соответственно в $n+1$ и n точках, являющихся конусами и параболоидами пучка. Два пучка B^1 и $\tilde{B}^1$ эквивалентны тогда и только тогда, когда совокупности точек их пересечения с многообразиями Δ_0 и δ_0 проективно эквивалентны. С помощью теории элементарных делителей λ-матриц получен способ приведения уравнений пучков гиперквадрик к каноническим видам. Произведена подробная классификация пучков квадрик трехмерного аффинного проотранства.

Двумерные л.с.гк. B^2 называются связками гиперквадрик. Плоскость B^2 пересекает гиперповерхности Δ_0 и δ_0 по кривым Γ и γ порядка $n+1$ и n соответственно. В общем случае кривые Γ и γ пересекаются в $n(n+1)$ точках, которые являются цилиндрами связки. Классификацию связок гиперквадрик можно производить на основе проективной классификации плоских кривых Γ и γ и их взаимного расположения на плоскости B^2. Для связок квадрик пространства A_3 произведена подробная классификация, основанная на классификации плоских кривых третьего порядка.

3. Рассмотрим m-параметрическое семейство $Q(m)$ центральных невырожденных гиперквадрик Q в A_n. Отнесем его к подвижному реперу $\{A, e_i\}$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Уравнения гиперквадрики Q записываются в виде $Q(x) \equiv a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0$, $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$, $\det\|a_{\alpha\beta}\| = const$, $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, \ldots, n$. Семейство $Q(m)$ можно задать системой дифференциальных уравнений $\theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta\varkappa} \tau^\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, m)$, где $\theta_{\alpha\beta}$ - структурные формы гиперквадрики Q, $\tau^\varkappa$ - инвариантные формы бесконечной аналитической группы преобразований пространства параметров S^m. Обычным способом получим систему величин $\{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta\varkappa}, \ldots, \Lambda_{\alpha\beta\varkappa_1\ldots\varkappa_p}\}$, являющуюся фундаментальным объектом порядка p многообразия $Q(m) \times S^m$. Система уравнений $a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0$,

$\Lambda_{\alpha\beta\varkappa} x^\alpha x^\beta = 0, \ldots, \Lambda_{\alpha\beta\varkappa_1\ldots\varkappa_p} x^\alpha x^\beta = 0$ определяет фокальное многообразие ${}^{(p)}f(m)$ гиперквадрики Q ранга p [3].

В S^A_N фундаментальный объект порядка p определяет соприкасающуюся порядка p плоскость ${}^{(p)}B(m)$ поверхности $Q(m) \subset S^A_N$. Размерность этой плоскости равна $N_p = m + \frac{1}{2} m(m+1) + \ldots + \frac{1}{p!} m(m+1)\ldots(m+p-1)$. Плоскость ${}^{(p)}B(m)$, являющуюся линейной системой гиперквадрик, назовем соприкасающейся порядка p линейной системой гиперквадрик семейства $Q(m)$. В работе [2] дается аналогичное определение для 1-семейств квадрик. Уравнение л.с.гк. ${}^{(p)}B(m)$ имеет вид $(a_{\alpha\beta} + \Lambda_{\alpha\beta\varkappa} + \ldots + \Lambda_{\alpha\beta\varkappa_1\ldots\varkappa_p}) x^\alpha x^\beta = 0$. Если $N_p \leq n$, то фокальное многообразие ${}^{(p)}f(m)$ является базисным многообразием л.с.гк. ${}^{(p)}B(m)$.

Список литературы

1. А к и в и с М.А., С а ф а р я н Л.П. К дифференциальной геометрии многообразий конусов второго порядка.– В кн.: Сб. статей по дифференциальной геометрии. Калинин, 1974, с.3-10.

2. Б а г л а е в И.И. Однопараметрические семейства центральных невырожденных квадрик в A_3. Иркутск, 1980. 18с. (Рукопись представлена Иркутским пед. ин-том. Деп. в ВИНИТИ 10 июля 1980, № 2945-80 Деп).

3. М а л а х о в с к и й В.С., М а х о р к и н В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.- Тр. геометр. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, с.113-133.

4. Т ю р и н А.Н. О пересечении квадрик.- Успехи матем. наук, 1975, т.30, вып.6, с.51-99.