ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.19 1988

УДК 514.75

ДВОЙНЫЕ ЛИНИИ ОТОБРАЖЕНИЯ И ИХ ГИПЕРСФЕРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

Г.М.С и л а е в а
(МГПИ им. В.И.Ленина)

В работе изучается связь сети двойных линий отображения и ее образа при гиперсферическом изображении.

Рассмотрим две гиперповерхности V_{n-1} и $\overline{V}_{n-1}$ в n-мерном евклидовом пространстве E_n и диффеоморфизм $f: V_{n-1}\to\overline{V}_{n-1}$. Предположим, что $\forall x\in V_{n-1}$: $y=f(x)\neq x$. Присоединим к каждой точке $x\in V_{n-1}$ подвижной репер $R^x=(x,\vec e_i,\vec e_n)$ так, чтобы векторы $\vec e_i$ $(i,j=1,\dots,n-1)$ принадлежали касательному пространству поверхности V_{n-1} в точке x, а единичный вектор $\vec e_n$ направим вдоль прямой xy, тогда $\vec{xy}=\lambda\cdot\vec e_n$, где $\lambda=\lambda(x)$ - гладкая функция точки x. Деривационные формулы репера R^x имеют вид:

$$d\vec x=\omega^i\vec e_i,\ d\vec e_i=\omega^j_i\vec e_j+\omega^n_i\vec e_n,\quad d\vec e_n=\omega^i_n\vec e_i+\omega^n_n\vec e_n.$$

Можно показать, что $\omega^i_n=t^i_j\omega^j$, где $T=\|t^i_j\|$ - аффинор. Если аффинор T невырожденный и имеет простой спектр, то к поверхности V_{n-1} сеть Σ^T_{n-1} двойных линий отображения f присоединена.

Рассмотрим отображение s прямых xy на точки единичной гиперсферы S_{n-1} с центром в некоторой точке O, при котором каждой прямой ставится в соответствие точка $\tilde x$ гиперсферы с радиусом-вектором $\vec{O\tilde x}=\vec e_n$, параллельным прямой xy, называемое гиперсферическим изображением. Считаем, что отображение s является диффеоморфизмом. Присоединим к каждой точке $\tilde x\in S_{n-1}$ подвижной репер $R^{\tilde x}=(\tilde x,\vec\varepsilon_i,\vec\varepsilon_n)$ так, чтобы векторы $\vec\varepsilon_i$ принадлежали касательному пространству к S_{n-1} в точке $\tilde x$, а $\vec\varepsilon_n=\vec e_n$.

Деривационные формулы репера $R^{\tilde x}$ имеют вид:

$$d\vec{\tilde x}=\Omega^i\vec\varepsilon_i,\ d\vec\varepsilon_i=\Omega^j_i\vec\varepsilon_j+\Omega^n_i\vec e_n,\ d\vec e_n=\Omega^i_n\vec\varepsilon_i+\Omega^n_n\vec\varepsilon_n. \qquad (1)$$

Можно показать, что верны формулы:

$$\vec\varepsilon_i=\vec e_i+\gamma_{ni}\vec e_n,\quad \gamma_{ni}=\vec e_n\cdot\vec e_i,\ \Omega^i=t^i_j\omega^j. \qquad (2)$$

Из формул (2) вытекает геометрический смысл ранга аффинора T : $\mathrm{rang}\,T$ равен размерности гиперсферического изображения конгруэнции прямых xy.

Рассмотрим линию $\gamma\subset V_{n-1}$: $\omega^i=\ell^i\check\theta$, $D\check\theta=\check\theta\wedge\check\theta_1$. Как показывают формулы (2), при гиперсферическом изображении s эта линия переходит в линию $s(\gamma)$: $\Omega^i=t^i_j\ell^j\check\theta$. Как показано ранее, линия $\gamma\subset V_{n-1}$ является двойной линией отображения f тогда и только тогда, когда

$$t^i_j\ell^j=m\ell^i \quad \text{или} \quad t^i_j\omega^j=m\omega^i. \qquad (3)$$

Следовательно, линия $\gamma\subset V_{n-1}$: $\omega^i=\ell^i\check\theta$ является двойной линией отображения f тогда и только тогда, когда при гиперсферическом изображении s она переходит в линию $\Omega^i=m\omega^i$, т.е. в линию $\Omega^i=(m\ell^i)\check\theta$. Из сказанного следует, что справедлива

Т е о р е м а 1. Сеть $\{\omega^i\}$ на поверхности V_{n-1} в гиперсферическом изображении s переходит в сеть $\{\Omega^i\}$, где $\Omega^i=m\omega^i$, тогда и только тогда, когда сеть $\{\omega^i\}$ является сетью двойных линий отображения f.

Можно доказать, что справедливы теоремы.

Т е о р е м а 2. Пусть поверхность V_{n-1} отнесена к некоторой сети Σ_{n-1}, поверхность $\overline{V}_{n-1}$ - сети $f(\Sigma_{n-1})$. Сеть Σ_{n-1} является сетью двойных линий отображения f тогда и только тогда, когда $s(\Sigma_{n-1})=s(f(\Sigma_{n-1}))$.

Т е о р е м а 3. Если конгруэнция прямых xy является нормальной относительно поверхности V_{n-1}, то сеть Σ^T_{n-1} двойных линий отображения f при гиперсферическом изображении s переходит в сеть линий кривизны на гиперсфере S_{n-1}.

Т е о р е м а 4. Сеть Σ^T_{n-1} является геодезической тогда и только тогда, когда сеть $s(\Sigma^T_{n-1})$ также геодезическая, т.е. состоит из дуг больших окружностей гиперсферы S_{n-1}.

Гладкая линия $\gamma\subset V_{n-1}$: $\omega^i=\ell^i\check\theta$, $D\check\theta=\check\theta\wedge\check\theta_1$ является характеристической линией отображения f, если

$$h^k_{ij}\omega^i\omega^j=\theta\omega^k, \qquad (4)$$

где h^k_{ij} - тензор деформации отображения f, θ - некоторая 1-форма.

Теорема 5. Двойная линия отображения f является характеристической линией отображения f тогда и только тогда, когда эта линия является характеристической линией гиперсферического изображения S.

Доказательство. Тензор h^k_{ij} и тензор деформации t^k_{ij} гиперсферического изображения S в рассматриваемом случае связаны равенством:

$$2d\lambda\cdot t^k_j\omega^j + \lambda t^k_{ij}\omega^i\omega^j = (\delta^k_s+\lambda t^k_s)h^s_{ij}\omega^i\omega^j.$$

Пусть $\gamma\subset V_{n-1}$ является двойной и характеристической линией отображения f одновременно. С учетом равенства (3) последняя формула запишется в виде:

$$2d\lambda\cdot m\omega^k + \lambda t^k_{ij}\omega^i\omega^j = (\delta^k_s+\lambda t^k_s)\cdot h^s_{ij}\omega^i\omega^j, \qquad (5)$$

откуда по формуле (4) получим:

$$2d\lambda\cdot m\omega^k + \lambda t^k_{ij}\omega^i\omega^j = \theta\omega^k + \lambda\cdot\theta\cdot m\omega^k,$$

следовательно, $t^k_{ij}\omega^i\omega^j = \xi\omega^k$, где $\xi = \frac{1}{\lambda}\cdot(\theta+\lambda\cdot\theta\cdot m - 2d\lambda\cdot m)$.

Таким образом, линия $\gamma\subset V_{n-1}$ является характеристической линией гиперсферического изображения S.

Пусть теперь $\gamma\subset V_{n-1}$ является двойной линией отображения f и характеристической линией гиперсферического изображения S. Тогда имеют место равенства $t^k_{ij}\omega^i\omega^j=\xi\omega^k$ и формулы (3).

Рассмотрим форму $\theta = \frac{\xi\cdot\lambda+2d\lambda\cdot m}{1+\lambda\cdot m}$ (можно показать, что $1+\lambda m\neq 0$), откуда $\xi = \frac{1}{\lambda}\cdot(\theta+\theta\cdot\lambda m - 2d\lambda\cdot m)$.

Итак, равенство $t^k_{ij}\omega^i\omega^j=\xi\omega^k$ запишется в виде $\lambda t^k_{ij}\omega^i\omega^j = (\theta+\theta\cdot\lambda m - 2d\lambda\cdot m)\,\omega^k$ или $2d\lambda\cdot m\omega^k + \lambda t^k_{ij}\omega^i\omega^j = \theta(\omega^k+\lambda m\cdot\omega^k)$.

Используя формулу (3), последнее равенство запишем в виде:

$$2d\lambda\cdot m\omega^k + \lambda t^k_{ij}\omega^i\omega^j = (\delta^k_s+\lambda t^k_s)\,\omega^s\theta.$$

Заметим, что левые части полученного равенства и равенства (5) совпадают, следовательно, их правые части также совпадают:

$$(\delta^k_s+\lambda t^k_s)h^s_{ij}\omega^i\omega^j = (\delta^k_s+\lambda t^k_s)\,\omega^s\theta.$$

Можно показать, что матрица $\|\delta^k_s+\lambda t^k_s\|$ невырожденная. Тогда из последнего равенства следует, что $h^k_{ij}\omega^i\omega^j = \theta\omega^k$. Таким образом, линия $\gamma\subset V_{n-1}$ является характеристической линией отображения f.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I9 1988

УДК 514.75

РАССЛОЯЕМЫЕ ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПАРОЙ КОНИК

Е.В.Скрыдлова

(Калининградский университет)

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются вырожденные [I] конгруэнции $(C_1, C_2)_{1,2}$, порожденные парой коник C_1 и C_2, касающихся линии ℓ пересечения своих плоскостей, в которых коника C_1 описывает однопараметрическое семейство, а коника C_2 - конгруэнцию. Решена задача расслоения от конгруэнции коник C_2 к ассоциированной прямолинейной конгруэнции. Выделен и геометрически охарактеризован один из частных классов таких конгруэнций.

Проективное пространство P_3 отнесем к подвижному реперу $R=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$, деривационные формулы которого имеют вид:

$$dA_\alpha = \omega^\beta_\alpha A_\beta,$$

где ω^β_α -линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma$$

и условию эквипроективности

$$\omega^0_0+\omega^1_1+\omega^2_2+\omega^3_3=0.$$

Вершины A_0 и A_3 репера совместим с точками касания коник C_1 и C_2 соответственно с прямой ℓ, вершины A_i ($i=1,2$) расположим на кониках C_i так, чтобы A_1 была полярно сопряжена точке A_3 относительно коники C_1, а A_2 была полярно сопряжена точке A_0 относительно коники C_2. Относительно такого репера уравнения коник C_1 и C_2 запишутся соответственно в виде:

$$\begin{cases}(x^3)^2-2x^0x^1=0,\\ x^2=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}(x^0)^2-2x^2x^3=0,\\ x^1=0.\end{cases}$$

Так как коника C_1 описывает однопараметрическое семейство, а коника C_2 - конгруэнцию, то