И. С. Кузнецова

КАНТ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ ЗНАНИИ

На всем протяжении развития науки ученые сознавали связь между гносеологией и конкретными науками. Об этом со всей определенностью писал А. Эйнштейн: «Замечательный характер имеет взаимосвязь, существующая между наукой и теорией познания. Они зависят друг от друга. Теория познания без соприкосновения с наукой вырождается в пустую схему. Наука без теории познания (насколько это вообще мыслимо) становится примитивной и путанной». Кант хорошо понимал эту взаимосвязь теории познания и науки, поэтому, создавая свое учение о знании, он не мог обойтись без рассмотрения вопроса о математическом знании, без вопроса о том, как возможно естествознание. В то же время решение проблемы происхождения, обоснования, особенности математического знания зависят у Канта от его общегносеологических установок.

Эта взаимосвязь общефилософских принципов Канта и его взглядов на математическое знание и рассматривается в предлагаемой статье.

Кант отстаивал мысль, что происхождение знаний связано с опытом: «Никакое познание не предшествует во времени опыту, оно всегда начинается с опыта»[1]. Но в самом понимании опыта Кантом проявилось его колебание между материализмом и идеализмом, на которое обращал внимание В. И. Ленин[2]. Эмпиризм Канта носит особый характер, для него «опыт сам есть вид познания, требующий участия рассудка, правила которого я должен предполагать в себе еще до того, как мне даны предметы, стало быть a priori, эти правила должны быть выражены в априорных понятиях, с которыми, стало быть, все предметы опыта должны необходимо сообразоваться и согласоваться»[3].

Кант верно заметил, что в эмпирических исследованиях мы имеем дело не только с чувственным, но и с логическим: необходимы и предварительные научные знания для постановки опыта, и логиче-

---

[1] Кант И. Соч., т. 3, с. 105.
[2] См.: Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 206,
[3] Кант И. Соч., т. 3, с. 88.

ское исследование первичных данных, и сами чувственные восприятия имеют логическое языковое выражение. Но Кант абсолютизировал эту особенность эмпирического познания, и у него «мы познаем о вещах лишь то, что вложено в них нами самими» [1].

Этот взгляд на знание вообще Кант перенес и на математическое знание в частности. Для него математика «дает блестящий пример того, как далеко мы можем продвинуться в априорном знании независимо от опыта» [2].

В своем понимании происхождения математического знания Кант занял позицию, отличающуюся от распространенных в его время взглядов. В противоположность Лейбницу и Юму Кант считал все математические суждения не аналитическими, а синтетическими. В аналитических суждениях знание, содержащееся в предикате, может быть выведено из субъекта чисто логически. Эти суждения бывают «лишь поясняющими и не прибавляют ничего к содержанию познания» [3]. Те же суждения, которые являются «расширяющими и умножают данное познание» [4], Кант назвал синтетическими. Для обоснования своего мнения он рассматривает аксиому геометрии: «прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками». Кант считает, что понятие прямой содержит только качество, но ничего не говорит о количестве. Поэтому понятие кратчайшего расстояния целиком присоединяется к понятию прямой линии извне и никаким расчленением не может быть извлечено из этого понятия прямой. Отсюда Кант выводил необходимость созерцания, с помощью которого только и возможен синтез [5].

Лейбниц, создатель дифференциального исчисления, получив в руки такой мощный аппарат исследования, как математический анализ, не мог удержаться от того, чтобы не объявить математические суждения аналитическими. У Канта была более скромная математическая база. Чаще всего он обращался к геометрии Евклида, а так как аксиоматический метод существенно связан с синтетическими суждениями, то вполне естественно, что Кант считал все математические положения синтетическими. С точки зрения современной математики, суждения могут быть как аналитическими, так и синтетическими. Таким образом, и Лейбниц, и Кант допускали известную односторонность. И все же Кант в определении природы математических суждений сделал решительный шаг вперед, все значение которого еще недостаточно оценено в нашей литературе. В самом деле, при создании фундаментальной математической теории главную роль играет синтез. Новое в математике не может быть получено чисто

[1] Кант И. Соч., т. 3, с. 88.
[2] Там же, с. 110.
[3] Кант И. Соч., т. 4(1), с. 80.
[4] Там же, с. 80.
[5] См.: Кант И. Соч., т. 3, с. 118.

индуктивным путем, как это представляли сторонники эмпиризма. Нельзя создать фундаментальную теорию и дедуктивным способом, как полагали рационалисты. И Кант, пожалуй, первым отметил, что создание фундаментальной теории (просто теория может быть выведена дедуктивно из общих положений) возможно лишь синтетическим путем.

В отношении синтеза математическое знание, по мнению Канта, близко метафизическому, так как «метафизика, по крайней мере, по своей цели, состоит исключительно из априорных синтетических положений»[1]. Априорные синтетические суждения Кант считал возможными потому, что, по его мнению, человек с самого начала имеет дело с готовыми формами созерцания — пространством и временем. Пространство и время для Канта являются свойствами чувственности, с помощью которой человек познает вещи, точнее, не сами вещи (они, по учению Канта, непознаваемы), а только явления.

Кант был убежден, что чистое созерцание (пространства и времени) делает возможным и эмпирическое созерцание, безусловно приложимо и к «эмпирическому созерцанию»[2]. Синтез пространства и времени как существенных форм всякого созерцания делает возможным внешний опыт, а «потому и всякое знание о предметах его и все, что математика в ее чистом применении доказывает об этом синтезе, не может быть неправильно»[3].

Априорные и неизменные свойства пространства находят свое выражение в аксиомах евклидовой геометрии. Согласно кантовскому учению, в чистом созерцании возможна лишь геометрия Евклида, а отсюда следует невозможность неевклидовых геометрий в опыте. Таким образом, методология Канта обосновала невозможность неевклидовых геометрий накануне их открытия.

Из того, что математическое знание, по Канту, опирается на формы чувственной интуиции — на пространство и время,— он выводит всеобщий и необходимый характер суждений математики. Это ведет к тому, что возводятся в ранг всеобщности те истины математики, которые были известны во времена Канта. Так, евклидовой геометрии приписывалась всеобщность и единственность, вообще не учитывалась диалектичность развития математики.

История же математики показывает, что она не представляет собой свод всеобщих, необходимых абсолютных истин. Для ее развития характерно то, что «основные теоремы» переходят в разряд следствий — то, что считалось аксиомой, становится теоремой. Кант много писал о всеобщности и необходимости геометрии, но, начиная примерно с «Эрлангенской программы» Ф. Клейна, стало ясно, что под «аналитической», «синтетической», «проективной», «конформной», «не-

---

[1] Кант И. Соч., т. 3, с. 117.
[2] Там же, с. 240.
[3] Там же, с. 240.

евклидовой» геометриями скрывается одна-единственная дисциплина — линейная алгебра современной математики. Вот и спустились в подчиненное положение «следствий» и даже «упражнений» те всеобщие и необходимые истины элементарной геометрии, о которых с таким почтением писал Кант.

Но вернемся к кантовскому обоснованию априорности математического знания. Он ссылается на пространство и время, объясняя их априорностью абсолютную точность и общезначимость положений геометрии и арифметики. Если поставить вопрос, на основании чего Кант считал пространство и время априорными, то оказывается, что выводил он это из аподиктической достоверности и всеобщности математических суждений.

Таким образом, эти рассуждения Канта представляют собой то, что в логике называют «порочным кругом».

Это априорное, всеобщее, необходимое математическое знание является, по Канту, познанием при помощи конструирования понятий. В этом немецкий философ видел отличие этого вида знания от философского: философское познание достигается разумом посредством понятий, а математическое знание есть познание посредством конструирования понятий. Но конструировать понятие — значит показать и соответствующее ему созерцание»[1].

Кант полагал, что для конструирования понятий необходимо не эмпирическое созерцание, а такое созерцание, которое выражает в представлении общезначимость для всех возможных созерцаний, подходящих под одно понятие. Как происходит подобное конструирование понятия, он объяснял на примере треугольника. По его мнению, предмет, соответствующий этому понятию, дается в чистом созерцании или вслед за этим также и на бумаге. Но все равно образец не заимствуется из опыта, так как не учитывается ни величина углов, ни длина сторон[2].

Сейчас трудно точно реконструировать процесс возникновения элементарных понятий математики. У Евклида в «Началах» говорилось о прямой как о длине без толщины. В доказательствах он не пользовался подобными определениями, поэтому можно предположить, что Евклид хотел проиллюстрировать процесс возникновения идеальных математических объектов.

Об этом процессе ясно сказано у Ф. Энгельса: «Как понятие числа, так и понятие фигуры заимствованы исключительно из внешнего мира, а не возникли в голове из чистого мышления. Должны были существовать вещи, имеющие определенную форму, и эти формы должны подвергаться сравнению, прежде чем можно было дойти до понятия фигуры»[3]. И эти формы подвергались сравнению, и идеаль-

---

[1] Кант И. Соч., т. 3, с. 500.
[2] Там же, с. 500.
[3] Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 37.

ные математические объекты стали столь привычными, что их «земное» происхождение оказалось забытым, и для Канта такое элементарное понятие, как понятие треугольника, возникло в чистом созерцании.

Впрочем, если говорить о математике в целом, то она оперирует абстракциями таким образом, что вообще непосредственно не исследует действительный мир. И если элементарные понятия (прямой, фигуры и так далее) имели прообраз в действительности, то затем, развиваясь, математическое знание переходит в особую область, где понятия производятся не просто абстрагированием от нематематических свойств предметов, но получены в результате абстрагирования от абстракций. Поэтому Энгельс писал о ней как о «науке, занимающейся умственными построениями, хотя бы являющимися отражениями реальности[1]. В этой особенности математического знания и следует искать корни математического идеализма, априоризма Канта.

Математический идеализм Канта не только подвергался критике со стороны философов-материалистов, но и вызывал резкие возражения математиков. Лобачевский, критикуя учение Канта об априорном характере математических понятий, писал: «Такие понятия приобретаются чувствами врожденными — не должно верить»[2]. Создатель неевклидовой геометрии был убежден, что «в самих понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую проверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты»[3].

Кант же полагал, что не только математическое знание, но и вообще «все наше знание относится в конечном счете к возможным созерцаниям, так как только посредством их дается предмет»[4]. Научное, то есть всеобщее и необходимое знание, по мнению Канта, возникает лишь тогда, когда чувственное содержание исследуется при помощи различных видов синтеза, высшей формой которого является априорное единство самосознания. По Канту, чистая математика «может иметь объективную реальность только при том условии, что она направлена на предмет чувств, а о них имеется твердо установленное основоположение, гласящее, что наше чувственное представление никоим образом не есть представление о вещах самих по себе, а есть представление о том способе, каким они нам являются»[5].

---

[1] Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 20, с. 529.

[2] Лобачевский Н. И. Полн. собр. соч. Т. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1946—1951. 1946, с. 186.

[3] Там же, т. 2, с. 147.

[4] Кант И. Соч., т. 3, с. 604.

[5] Кант И. Соч., т. 4(1), с. 103.

Если учесть, что Кант считал, что математика дает философии превосходный материал, подкрепляющий ее исследования [1], то кажется вполне естественным, даже необходимым то, что для подтверждения общих философских установок Кант рассматривал математическое знание как априорное.

В самом деле, если пространство и время — это априорные формы чувственности, то математическое знание не только имеет наглядный характер, но и не простирается дальше той области, к которой применимы формы чувственной интуиции. «Вещи в себе» лежат за пределами этой области, значит, ограниченность математического знания условиями чувственной интуиции подтверждает основной гносеологический тезис Канта о недоступности «вещей в себе» теоретическому познанию.

Таким образом, в учении Канта о познании наблюдается взаимосвязь, взаимовлияние его взглядов на природу математического знания и его общегносеологических принципов, которые в истории философии обычно определяются как агностицизм.

---

[1] Кант И. Соч., т. 4(1), с. 433.