УДК 514.75

В.С. Малаховский
(Калининградский государственный университет)

ОБ ОДНОЙ РЕКУРРЕНТНОЙ ФОРМУЛЕ, ПОРОЖДАЮЩЕЙ ПОДМНОЖЕСТВА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Рассмотрена рекуррентная формула, позволяющая по заданному простому нечетному числу $p \in P$ и четному натуральному числу k определять подмножества простых чисел. Дана компьютерная программа для определения по этой рекуррентной формуле подмножеств $M^{(k)}_{p,n^{(k)}_p}$, содержащих 10 и более попарно различных простых чисел ($n^{(k)}_p \geq 10$). Каждому такому подмножеству $M^{(k)}_n$ однозначно ставится в соответствие квадратный трехчлен $\frac{1}{2}kx(x+1)+p$, значения которого при x=0,1,…, $n^{(k)}_p - 1$ определяют все $n^{(k)}_p$ простых чисел множества $M^{(k)}_n$. Выделены подмножества, образованные 15 и более простыми числами ($n^{(k)}_p \geq 15$), и определены соответствующие им квадратные трехчлены.

Пусть p – произвольное нечетное простое число, k – четное натуральное число. Рассмотрим числовую последовательность $(a^{(k)}_{n,p})$, задаваемую следующей рекуррентной формулой:

$$a^{(k)}_{n+1,p} = a^{(k)}_{n,p} + kn, \tag{1}$$

где по определению $a^{(k)}_{1,p} = p$. Такая последовательность однозначно определяет квадратный трехчлен

$$f_{p,k}(x)=\frac{1}{2}kx(x+1)+p, \qquad (2)$$

значения которого при x = 0, 1, 2, 3,… совпадают с членами последовательности (1) при n = 1, 2, 3, 4, …:

$$p,\ p+k,\ (p+k)+2k,\ ((p+k)+2k)+3k,\ \ldots \qquad (3)$$

Обозначим символом $n_p^{(k)}$ такое натуральное число, что все числа $a_{n,p}^{(k)}$ (n=1,2,…, $n_p^{(k)}$) – простые, а число $a_{n_p^{(k)}+1,p}^{(k)}$ – составное.

Подмножество

$$M_{p,n_p^{(k)}}^{(k)}=\{a_{1,p}^{(k)},a_{2,p}^{(k)},\ldots,a_{n_p^{(k)},p}^{(k)}\} \qquad (4)$$

простых чисел определяется заданием простого числа p и четного натурального числа k. Его элементы – значения многочлена (2) при x = 0, 1, 2, …, $n_p^{(k)}-1$.

Компьютерная программа

```
> t:=2:
> for i while i<=50
> do print(t):r:=3:
>    for j while j<=10000
>    do r:=nextprime (r):p:=r:q:=0:1:=0:
>        for k while k<=100                                   (5)
>        do s:=p+q: if isprime (s) then S[1]:=s:1:=1+1 else
>            break fi:p:=s:q:=q+t:
>        od: if 1>=10 then print (seq (S[1], 1=0..1–1, {1}) fi:
>    od: t:=t+2:
> od:
```

составленная Н.В. Малаховским с использованием пакета программ Maple V Release 4.00 и, позволяет определить подмножества $M_{p,n_p^{(k)}}^{(k)}$ при

$$n_p^{(k)}\ge 10,\ p\le 95467,\ 2\le k\le 108,\ a_p^{(k)}\le 104759 \qquad (6)$$

Например, при $n_p^{(k)} \geq 15$ и выполнении неравенств (6) подмножества $M_{p,n_p^{(k)}}^{(k)}$ определяются следующими формулами:

$M_{17,16}^{(2)}$ ={17, 19, 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107, 127, 149, 173, 199, 227, 257},

$M_{41,40}^{(2)}$ ={41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421, 461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911, 971, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601},

$M_{19,18}^{(4)}$ ={19, 23, 31, 43, 59, 79, 103, 131, 163, 199, 239, 283, 331, 383, 439, 499, 563, 631},

$M_{23,22}^{(6)}$ ={23, 29, 41, 59, 83, 113, 149, 191, 233, 293, 353, 419, 491, 569, 653, 743, 839, 941, 1049, 1163, 1283, 1409},

$M_{653,18}^{(8)}$ ={653, 661, 677, 701, 733, 773, 821, 877, 941, 1013, 1093, 1181, 1277, 1381, 1493, 1613, 1741, 1877},

$M_{17,15}^{(12)}$ ={17, 29, 53, 89, 137, 197, 269, 353, 449, 557, 677, 809, 953, 1109, 1277},

$M_{31,29}^{(12)}$ ={31, 43, 67, 103, 151, 211, 283, 367, 463, 571, 691, 823, 967, 1123, 1291, 1471, 1663, 1867, 2083, 2311, 2551, 2803, 3067, 3343, 3631, 3931, 4243, 4567, 4903},

$M_{28591,15}^{(12)}$ ={28591, 28603, 28627, 26663, 28711, 28771, 28843, 28927, 29023, 29131, 29251, 29383, 29527, 29683, 29851}, (7)

$M_{17,16}^{(14)}$ ={17, 31, 59, 101, 157, 227, 311, 409, 521, 647, 787, 941, 1109, 1291, 1487, 1697},

$M_{2383,16}^{(28)}$ ={2383, 2411, 2467, 2551, 2663, 2803, 2971, 3167, 3391, 3643, 3923, 4231, 4567, 4931, 5323, 5743},

$M_{607,15}^{(34)}$ ={607, 641, 709, 811, 947, 1117, 1321, 1559, 1831, 2137, 2477, 2851, 3259, 3701, 4177},

$M^{(36)}_{67391,17}$ ={67391, 67427, 67499, 67607, 67751, 67931, 68147, 68399, 68687, 69011, 69371, 69767, 70199, 70667, 71171, 71711, 72287},

$M^{(50)}_{47,16}$ ={47, 97, 197, 347, 547, 797, 1097, 1447, 1847, 2297, 2797, 3347, 3947, 4597, 5297, 6047},

$M^{(54)}_{19219,15}$ ={19219, 19273, 19381, 19543, 19759, 20029, 20353, 20731, 21163, 21649, 22189, 22783, 23431, 24133, 24889},

$M^{(54)}_{53117,15}$ ={53117, 53171, 53279, 53441, 53657, 53927, 54251, 54629, 55061, 55547, 56087, 56681, 57329, 58031, 58787},

$M^{(84)}_{1777,15}$ ={1777, 1861, 2029, 2281, 2617, 3037, 3541, 4129, 4801, 5557, 6397, 7321, 8329, 9421, 10597},

$M^{(84)}_{19249,15}$ ={19249, 19333, 19501, 19753, 20089, 20509, 21013, 21601, 22273, 23029, 23869, 24793, 25801, 26893, 28069},

$M^{(106)}_{1381,15}$ ={1381, 1487, 1699, 2017, 2441, 2971, 3607, 4349, 5197, 6151, 7211, 8377, 9649, 11027, 12511}.

Таким образом, при $k \le 108$ существуют только 18 подмножеств $M^{(k)}_{p,n_p^{(k)}}$ простых чисел с числом элементов $n_p^{(k)} \ge 15$. Если же расширить диапазон компьютерной программы (5) до $k \le 2000$, то таких подмножеств будет 29. Следовательно, при $108 < k \le 2000$; $a_p^{(k)} \le 30000$ существует всего 11 подмножеств $M^{(k)}_{p,n_p^{(k)}}$, содержащих не менее 15 простых чисел.

Например, одно из таких подмножеств $M^{(890)}_{15671,19}$ содержит 19 простых чисел, а подмножество $M^{(1986)}_{19163,15}$ – 15 простых чисел:

$M^{(890)}_{15671,19}$ ={15671, 16561, 18341, 21011, 24571, 29021, 34361, 40591, 47711, 55721, 64621, 74411, 85091, 96661, 109121, 122471, 136711, 151841, 167861}, (8)

$M^{(1986)}_{19163,15}$ ={19163, 21149, 25121, 31079, 39023, 48953, 60869, 74771, 90659, 108533, 128393, 150239, 174071, 199889, 227693}. (9)

Используя формулу (2), находим 29 квадратных трехчленов, значения которых при $x = \overline{0, n_p^{(k)} - 1}$ образуют подмножества $M^{(k)}_{p,n_p^{(k)}}$ в формулах (7 – 9):

$$x^2 + x + 17\ (x = \overline{0,15});\ x^2 + x + 41\ (x = \overline{0,39});$$

$$2x^2 + 2x + 19\ (x = \overline{0,17});\ 3x^2 + 3x + 23\ (x = \overline{0,21});$$

$$4x^2 + 4x + 653\ (x = \overline{0,17});\ 6x^2 + 6x + 17\ (x = \overline{0,14});$$

$$6x^2 + 6x + 31\ (x = \overline{0,28});\ 6x^2 + 6x + 28591\ (x = \overline{0,14});$$

$$7x^2 + 7x + 17\ (x = \overline{0,15});$$

$$14x^2 + 14x + 2383\ (x = \overline{0,15});\ 17x^2 + 17x + 607\ (x = \overline{0,14});$$

$$18x^2 + 18x + 67391\ (x = \overline{0,16});\ 25x^2 + 25x + 47\ (x = \overline{0,15});$$

$$27x^2 + 27x + 19219\ (x = \overline{0,14});\ 27x^2 + 27x + 53117\ (x = \overline{0,14});$$

$$42x^2 + 42x + 1777\ (x = \overline{0,14});\ 42x^2 + 42x + 19249\ (x = \overline{0,14});$$

$$53x^2 + 53x + 1381\ (x = \overline{0,14});\ 55x^2 + 55x + 2999\ (x = \overline{0,14});$$

$$128x^2 + 128x + 41641\ (x = \overline{0,14});\ 138x^2 + 138x + 1511\ (x = \overline{0,16});$$

$$143x^2 + 143x + 3271\ (x = \overline{0,15});\ 182x^2 + 182x + 8329\ (x = \overline{0,15});$$

$$209x^2 + 209x + 3739\ (x = \overline{0,15});\ 216x^2 + 216x + 66137\ (x = \overline{0,15});$$

$$247x^2 + 247x + 30937\ (x = \overline{0,16});\ 445x^2 + 445x + 15671\ (x = \overline{0,18});$$

$$507x^2 + 507x + 80407\ (x = \overline{0,15});\ 993x^2 + 993x + 19163\ (x = \overline{0,14}).$$

Из этих 29 многочленов только три подмножества определяют при $x = \overline{0, n_p^{(k)} - 1}$ более 20 попарно различных простых чисел:

$$x^2 + x + 41 \; (x = \overline{0,39}); \; 3x^2 + 3x + 23 \; (x = \overline{0,21}); \\ 6x^2 + 6x + 31 \; (x = \overline{0,28}). \tag{11}$$

Заметим, что множество $M^{(2)}_{41,40}$ совпадает со множеством сорока попарно различных значений сорока многочленов

$$f_a(x) \equiv x^2 - ax + \frac{1}{4}(a^2 + 163), \tag{12}$$

где a – нечетное натуральное число, меньшее 81 (1≤a≤79), а $x = \overline{(0, \frac{1}{2}(a + 79))}$ (см. [1, с. 6]).

Список литературы

1. *Малаховский В.С.* Введение в математику. Калининград: Янтарный сказ, 1998. 440 с.

V.S. Malakhovsky

ABOUT ONE RECURRENT FORMULA GENERATING SUBSETS OF PRIME NUMBERS

A recurrent formula is

$$a^{(k)}_{n+1,p} = a^{(k)}_{n,p} + kn,$$

where p is an arbitrary odd prime number, k is a natural even number and $a^{(k)}_{1,p} = p$. The computer program that defines $n^{(k)}_p \geq 10$ prime numbers $a^{(k)}_{n,p}$ for $n = \overline{1, n^{(k)}_p}$ is given. To each pair (p, k) a single quadratic trinomial $\frac{1}{2}kx(x+1) + p$ is defined whose values for $x = \overline{0, n^{(k)}_p}$ coincide with $a^{(k)}_{n,p}$ for $n = \overline{1, n^{(k)}_p}$. 29 quadratic trinomials that define $n^{(k)}_p \geq 15$ prime numbers are given.