А.Г. Пушкарский

КУРТ ГЁДЕЛЬ И ЕГО ОНТОЛОГИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО[1]

Курт Гёдель наиболее всего известен математикам и философам своими знаменитыми теоремами о неполноте. Физики также хорошо знают его по релятивистской модели вращающейся Вселенной. Гораздо менее известен, особенно российской публике, вклад Гёделя в разработку своего собственного варианта онтологического доказательства бытия Бога. В статье рассматриваются исторические и философские предпосылки этого доказательства, его формальные особенности, а также различные его интерпретации. А также обсуждается значение геделева доказательства, как для философии, так и для науки вообще.

Kurt Goedel is mostly known to mathematicians and physicists by his renowned incompleteness theorems. Physicists also know him well by his relativistic model of rotating universe. Goedel's contribution to the development of his own version of ontological proof of God's existence is much less known. The article considers historical and philosophical premises for this proof, its formal pecularities, as well as its various interpretations. The relevance of Goedel's proof both for philosophy and for science in general is discussed.

***Ключевые слова**: Гёдель, онтологическое доказательство, модальная логика, математическое доказательство.*
***Keywords**: Goedel, ontological argument, modal logic, mathematical proof.*

Logic will never be the same again

Курт Гёдель

Курт Гёдель — выдающийся австрийский логик, математик и философ, и, по мнению многих, является самым выдающимся логиком после Аристотеля. Он родился 28 апреля 1906 г. в г. Брюнн в Южной Моравии, входившей в Австро-

[1] Выполнено при поддержке гранта РФФИ № 12-06-00285а «Место и роль онтологий в моделировании аргументации».

венгерскую империю, ныне это г. Брно Чешской республики. В 1923 г. окончил школу, успев к выпускным экзаменам освоить университетский курс математики. Высшее образование получил в Венском университете, где начал изучать физику, затем любовь к точным наукам приводит его к изучению математики и математической логики. В этот же период Гёдель регулярно слушает лекции Г. Гомпеца (Henrich Gomperz) по греческой философии.

В 1926 г. Гёдель довольно случайно становится членом Венского кружка и тесно сотрудничает с Р. Карнапом, М. Шликом и др. Хотя он и никогда и не был позитивистом, но в то время разделяет некоторые их философские взгляды. Например, он принимал их метод анализа философских и научных понятий, использующий математическую логику, но резко отвергал их тезис о бессмысленности метафизики.

Там же в Вене в 1929 Гёдель защитил докторскую диссертацию, в которой доказал полноту исчисления предикатов первого порядка (непротиворечивость и независимость аксиом данного исчисления уже была доказана Д. Гильбертом и его учениками). 6 февраля 1930 г. ему была присуждена ученая степень доктора философии.

Осенью того же года он участвует в научном семинаре в г. Кёнигсберге, организованном редакцией журнала «Erkenntnis», и который стал вторым в серии семинаров посвященным точным наукам (Tagungfur Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften). В нем принимали участие Р. Карнап, Дж. Фон Нейман, Д. Гильберт и др., т.е. ведущие представители всех основных направлений в основаниях математики и логики — логицизма, формализма и интуиционизма. 6 сентября Гёдель делает доклад о доказательстве полноты исчисления предикатов, и, как он сам вспоминал в 1976 г., на следующий день в рамках дискуссий упоминает о своем новом результате в этой области, т.е. о теореме о неполноте. Уже подробно свою знаменитую теорему Гёдель изложил 23 октября 1930 г. на заседании одной из секций Венской Академии наук. Статья под названием ***«Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwarwandter Systeme I»*** («О формально неразрешимых предложениях Principia Mathematica и родственных систем I) с развернутым её изложением поступила в редакцию Лейпцигского журнала «Monatshefte für Mathematik und Phzsik» 17 ноября и вышла в 38 томе в следующем, 1931г. Теорема Гёделя о неполноте (***Первая теорема Гёделя***) утверждает, что если формальная теория Т, включающая арифметику целых чисел, непротиворечива, то она неполна. Иначе говоря, существует имеющее смысл утверждение арифметики целых чисел (обозначим его S), которое в рамках данной теории невозможно ни доказать, ни опровергнуть. Но либо утверждение S, либо утверждение «не S» истинно. Следовательно, в арифметике существует истинное утверждение, которое недоказуемо, а значит, и неразрешимо. Теорема Гёделя о неполноте применима и в случае обращения к исчислению предикатов второго порядка. Не менее поразительный результат имело и непосредственное следствие из теоремы о неполноте, доказанная Гёделем в следующем 1932 г., — ***Вторая теорема Гёделя***. Она утверждает, что непротиворечивость любой достаточно богатой математической системы, включающей арифметику целых чисел, не может быть установлена средствами самой этой системы на основе математических принципов, принятых различными школами в основаниях математики. Оба результата потрясли современную математику, показав не только невыполнимость программы формалистской философии Гильберта. Гёдель доказал, что какой бы подход к математике на основе надежных логических принципов мы ни избрали, нам все равно не удастся доказать непротиворечивость математики. Ни один из предложенных подходов к основаниям математики не будет исключением. А это означает, что математика вынуждена бесповоротно отказаться от претензий на абсолютную достоверность или значимость своих результатов, т. е. лишиться одной из основных своих особенностей, на которую она всегда претендовала.

С марта 1933 Гёдель становится приват-доцентом математики Венского университета. А в том же году в небольшой статье — «Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls», представил такую переформулировку системы модальной логики S4 К.И. Льюиса (C. I. Lewis), названной системой Т, которую можно было бы использовать для исследования непротиворечивости формальных логических систем и доказуемости в них. Его подход состоит в истолковании модального оператора необходимости — □ как утверждения о доказуемости. Эта система привлекла внимание многих логиков, и способствовала дальнейшему исследованию неклассических систем. Однако попытка интерпретировать □A как доказуемость в конкретной формальной системе оказывается не вполне удачной.

С 1933 по 1939 Гёдель несколько раз посещает США. В 1934 году он читает курс лекций "О неразрешимых теоремах формальных математических систем" в Принстоне, США. Тогда же он дает первое определение понятия рекурсивной функции (рекурсивность по Эрбрану-Гёделю). Когда в 1938 г. Гитлер захватил Австрию, Гёдель, опасаясь призыва в армию, эмигрирует в США, проехав через Россию по Транссибирской железной дороге. С 1940 г. он постоянно работал в Институте высших исследований г. Принстона, с 1946 года вошел в постоянный преподавательский состав Принстонского института, а с 1953 становится профессором данного института. Одним из ближайших друзей Геделя в Принстоне был Альберт Эйнштейн.

Переехав в США, Гёдель продолжил свои научные исследования в области математической логики и теории множеств, которые снова имели решающее значение для оснований математики. В своей работе «Совместимость аксиомы выбора и обобщенной гипотезы континуума с аксиомами теории множеств», опубликованной в 1940 г., он доказал, что если система аксиом теории множеств Цермело-Френкеля без аксиомы выбора непротиворечива, то добавление аксиомы выбора не нарушает непротиворечивости данной системы, т. е. аксиома выбора в рамках этой аксиоматики не может быть доказана. Там же он устанавливает, что гипотеза Кантора (гипотеза континуума) о том, что не существует кардинальных чисел, заключенных между $\aleph_0$ и $2^{\aleph_0}$ (т.е. кардинальным числом *c*, соответствующим множеству всех вещественных чисел), или, иначе говоря, что не существует несчетного множества действительных чисел с кардинальным числом, меньшим $2^{\aleph_0}$, и обобщенная гипотеза континуума не противоречит системе аксиом Цермело-Френкеля, даже если последнюю дополнить аксиомой выбора. Другими словами, гипотезу континуума как в обычном, так и в обобщенном варианте нельзя опровергнуть. Для доказательства своих утверждений Гёдель построил модели, в которых оба утверждения выполняются. В 1947 г. Гёдель предположил, что гипотеза континуума независима от аксиом Цермело-Френкеля и от аксиомы выбора.

В 1963 г. профессор математики Станфордского университета Пол Коэн (р. 1934) доказал, что и аксиома выбора, и гипотеза континуума независимы от остальных аксиом Цермело-Френкеля, если те непротиворечивы, т. е. иначе говоря, аксиома выбора и гипотеза континуума не могут быть доказаны на основе остальных аксиом Цермело-Френкеля. Более того, гипотеза континуума и тем более обобщенная гипотеза континуума не могут быть доказаны в системе Цермело-Френкеля, даже если ее дополнить аксиомой выбора.

Гражданство США Гёдель получил в 1948 г. В 1949 г. он предложил новый тип решения уравнений общей теории относительности, построив математическую модель вращающейся вселенной, в которой линии времени замкнуты и время может идти по кругу. Это было оценено Эйнштейном как «важный вклад» в эту теорию, хотя и не имеющий практического значения. По словам самого Гёделя, в этих разработках им двигала не его дружба с Энштейном, а интерес к философии И. Канта и его идеи о природе времени: "Все видят только их различие (т.е. философии Канта и теории относительности), но никто не видит в них согласованности". Тем не менее, эта работа Гёделя позволила сделать академическую дискуссию о путешествиях во времени приемлемым для позднейших исследователей. Все эти его работы до сих пор будоражат умы философов и ученых в попытках осмыслить и оценить их в самых различных аспектах.

В 1951 году Гёдель получил высшую научную награду США — Эйнштейновскую премию, а в 1974 году — Национальную Медаль Науки. Он был членом Национальной

Академии Наук США, Института Франции и почетным членом Лондонского Математического общества. Гёдель состоял в Королевском обществе и Королевской Академии. О его отношении к Австрии говорит тот факт, что Гёдель дважды отказался от членства в Академии Наук в Вене. Он также не принял Национальной Медали за научные и культурные достижения, и никогда не посещал Австрию после II мировой войны, оставаясь во время летнего отпуска в Принстоне.

В 1976 году, когда ему было уже 70 лет, Гёдель выходит на пенсию.

В конце жизни Гёдель страдал серьезными нервными заболеваниями. Умер он 14 января 1978 г. сидя в кресле в больничной палате.

История Онтологического аргумента

Что, гораздо менее известно, так это вклад Гёделя в разработку своего собственного варианта онтологического доказательства бытия Бога. В последний период жизни, используя аппарат модальной логики, он реконструирует и модифицирует знаменитый онтологический аргумент Ансельма Кентерберийского. В феврале 1970 года Гёдель показал свое доказательство американскому логику Дана Скотту и они обсудили его между собой. Тогда Гедель был очень обеспокоен своим здоровьем настолько, что боялся близкой смерти, и, видимо, хотел убедиться, что это доказательство не исчезнет вместе с ним. Позже в том же году, он сказал Оскару Моргенштерну, что, хотя он был "удовлетворен" данным доказательством, он так и не решился опубликовать его, опасаясь, что тогда все будут считать, что он на самом деле верит в Бога. Он же предпринял только некоторое логическое исследование, т.е. просто показать, что такое доказательство с классическими предпосылками, например, полноты и т.п., и соответствующей аксиоматизацией, возможно.

Основываясь на своих записях, Скотт представил версию аргумента Гёделя на своём семинаре по логическому следованию в Принстонском университете осенью 1970 года.

Благодаря его выступлению, а также воспоминаниям и заметками тех, кто принял участие в семинаре, онтологическое доказательство Геделя стал довольно широко известны. Правда сначала, оно было известно главным образом в версии Скотта, которое несколько отличается по форме от собственно гёделевского.

Его Гёдель разработал, без сомнения, задолго до 1970 года. Самая ранняя его версия была найдена в его бумагах. Это лист бумаги под названием "онтологическое доказательство" на немецком языке, и датированный собственноручно Геделем — "ок. 1941". Он содержит некоторые, но не все из идей его доказательства. Подготовительный материалы к доказательству онтологического аргумента содержатся в записной книжке Гёделя под названием "Фил XIV", датированной "Июль 1946 — май 1955". На последней странице этой тетради содержится приписка "Asbury Park 1954. Стр. 100 и далее", которая, предположительно, относится к страницам 103-109, относящихся к онтологическому доказательству. Письма Гёделя и другие документы свидетельствую, что он выехал 9 августа 1954 из Принстона на отдых в Эсбери Парк, небольшой прибрежный городок, до 3 октября 1954 года.

Таким образом, можно уверенно предположить, что эти страницы по онтологическому доказательству были написаны Геделем в конце лета и в начале осени 1954 года, а само оно было завершено не позднее мая 1955 года.

Философские предпосылки

В последний период жизни Гёдель много времени уделяет философским исследованиям. Основное влияние на его философские взгляды оказали Г. Лейбниц, И. Кант и Э. Гуссерль. Свою собственную философию он характеризовал как «рационалистическую, идеалистическую, оптимистическую и теологическую». Его философия также включала «монадологию с центральной монадой (Бог)». Ее также можно определить как некоторую форму математического платонизма, поскольку «идеи объективно существуют», а математика «имеет совершенные формы» и «достигает окончательного знания». В 1975 году он охарактеризовал себя как платониста особого рода, а именно — «концептуального и математического реалиста». Чисто философские работы Гёделя никогда не были опубликованы при его жизни. Отдельные записи, неоконченные философские работы, были собраны его учениками, и помещены в 3 том собраний сочинений Гёделя.

Без сомнения основание для своего доказательства онтологического аргумента Гёдель находит не у Ансельма или Декарта, а прежде всего в философии Лейбница. Именно Лейбниц был для Гёделя наиболее авторитетной фигурой в области философии. По воспоминаниям Хао Вана изучению его философии Гедель значительное внимание в 1930-х годах, и особенно в период 1943-46 гг. Сам Гёдель высказался однажды в таком духе, что Лейбниц «раскрыл тайну жизни», но эти его работы оказались утеряны. Также в бумагах Геделя были обнаружены краткие заметки посвященные разбору онтологического аргумента Лейбница.

Несомненно, он должен был знать основные положения Лейбница, относящиеся к онтологическому аргументу. Во-первых, Лейбниц считает, что онтологическое доказательство Декарта не является полным. Ему, по мнению Лейбница, удалось доказать только условное суждение, что если существование Бога возможно, то Бог на самом деле и действительно необходимо существует. Но это без доказательства уже предполагает, что существование Бога возможно и поэтому не может быть полным. Об этом в своих трудах Лейбниц упоминает несколько раз.

Отсюда, во-вторых, по Лейбницу онтологическое доказательство может быть завершено, только в случае доказательства возможность существования Бога. Для достижения этой цели Лейбниц постулирует концепцию Бога как Ens perfectissimum, существа, все атрибуты которого обладают совершенством. Это совершенство отождествляются им с простыми, чисто положительными качествами, которые не могут быть ничем ограничены, и поэтому не возможно низшая степень любого качества. Далее Лейбниц утверждает, что все чисто положительные качества могут и должны быть согласованы друг с другом, так что никакого противоречия из концепции Ens perfectissimum не может возникнуть, и поэтому такое существо должно быть возможно.

Эта аргументация Лейбница в очень кратком, даже загадочном, виде появляется в пункте 45 его знаменитой трактате «Монадология». Но наиболее полно она представлена в совсем небольшой работе Лейбница “Quod Ens perfectissimum exist” 1676 года, в русском переводе «Есть Совершеннейшее Существо». Этот текст, по крайней мере, и "Монадология", были, конечно, известно, Геделя, чье онтологическое доказательство как раз и строится вокруг идеи положительных свойств.

Доказательство

Ontological proof
(*1970)

Feb. 10, 1970

$P(\varphi)$ φ is positive (or $\varphi \in P$).

Axiom 1. $P(\varphi).P(\psi) \supset P(\varphi.\psi)$.[1]

Axiom 2. $P(\varphi) \vee P(\sim\varphi)$.[2]

Definition 1. $G(x) \equiv (\varphi)[P(\varphi) \supset \varphi(x)]$ (God)

Definition 2. $\varphi\,\mathrm{Ess.}\,x \equiv (\psi)[\psi(x) \supset N(y)[\varphi(y) \supset \psi(y)]]$. (Essence of x)[3]

$$p \supset_N q \;=\; N(p \supset q). \quad \text{Necessity}$$

Axiom 3. $P(\varphi) \supset NP(\varphi)$
$\sim P(\varphi) \supset N\sim P(\varphi)$

because it follows from the nature of the property.[a]

Theorem. $G(x) \supset G\,\mathrm{Ess}.x$.

Definition. $E(x) \equiv (\varphi)[\varphi\,\mathrm{Ess}\,x \supset N(\exists x)\,\varphi(x)]$. (necessary Existence)

Axiom 4. $P(E)$.

Theorem. $G(x) \supset N(\exists y)G(y)$,
hence $(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$;
hence $M(\exists x)G(x) \supset MN(\exists y)G(y)$. ($M$ = possibility)
$M(\exists x)G(x) \supset N(\exists y)G(y)$.

| $M(\exists x)G(x)$ means the system of all positive properties is compatible. 2
This is true because of:
Axiom 5. $P(\varphi).\varphi \supset_N \psi :\supset P(\psi)$, which implies

$$\begin{cases} x = x & \text{is positive} \\ x \neq x & \text{is negative.} \end{cases}$$

[1] And for any number of summands.
[2] Exclusive or.
[3] Any two essences of x are *necessarily equivalent*.

[a] Gödel numbered two different axioms with the numeral "2". This double numbering was maintained in the printed version found in *Sobel 1987*. We have renumbered here in order to simplify reference to the axioms.

Само доказательство состоит из 3-х определений — Бога, как совокупности всех положительных свойств, сущности и необходимого существования, 5 аксиом, и построено в системе модальной логики S5 второго порядка. Суть его состоит в том, что поскольку Бог по определению должен обладать всеми позитивными свойствами, а необходимое существование является свойством позитивным, то из сущности божественности следует необходимое существование индивида обладающего этими свойствами, причем во всех возможных мирах по определению необходимого существования. Вот как оно выглядит в современной записи:

Аксиома 1. $P(F)\ \&\ P(H) \supset P(F\&H)$ — конъюнкция позитивных свойств является позитивным свойством

Аксиома 2. $\neg P(F) \equiv P(\neg F)$ — свойство не является позитивным только если позитивно его отрицание

Определение 1. $G(x) \equiv \forall F(P(F) \supset F(x))$ — если Бог существует, имеет все положительные свойства

Определение 2. F ess $x \equiv \forall H\ [H(x) \supset N\ \forall x(H(x) \supset F(x))]$ — для свойства F быть сущностью предмета x означает, что любое свойство, присущее данному предмету, с необходимостью включается в свойство F

Определение 3. $E(x) \equiv \forall F(F$ ess $x \supset N\ \exists x\ F(\mathrm{x}))$ — необходимое существование (E) присуще предмету x, когда из сущности x вытекает, что необходимо найдется предмет, обладающий этой сущностью

Аксиома 3. $P(F) \supset N\ F(x)$ — любое свойство, которое является положительным, будет положительным с необходимостью

Теорема $G(x) \supset G$ ess x – Быть Богом существенное свойство

Аксиома 4. $P(E)$ — необходимое существование является положительным свойством

Теорема $G(x) \supset N\ \exists y G(\mathrm{y})$ — если является Богом, то он необходимо существует

Аксиома 5. $[P(F)\ \&\ N\ \forall x(F(x) \supset H(x)] \supset P(H)$ — все, что с необходимостью следует из позитивного свойства, является позитивным свойством

x=x — позитивное свойство, а x≠x — негативное

В конструировании своего доказательства Гёдель следует Лейбницу, т.е. отталкивается от условного утверждения, что если божественное существование возможно, то оно актуально и действительно необходимо:

$$M\, \exists x\, G(x) \supset N\, \exists y\, G(y)$$

Некоторые философы предполагали, что непосредственно из понятия Бога следует понятие Необходимого Существа. Т.е. необходимо, что если Бог существует, то Бог существует обязательно и невозможно, чтобы Бог существовал вероятно.

Гёдель дает более сложный вывод этого положения, который опирается на Аксиому 4:

$$P(E),$$

т.е. необходимое существование является положительным свойством.
По Определению 1:

$$G(x) \equiv \forall F(P(F) \supset F(x))$$

верно, и, следовательно, всегда верно, что Бог, если Бог существует, имеет все положительные свойства и так как в силу Аксиомы 3:

$$P(F) \supset N\, F(x)$$

т.е, любое свойство, которое является положительным будет положительным с необходимостью, то отсюда следует, что Бог, если Бог существует, имеет необходимое существование.
Из этих положений следует:

$$1.\ N\, (\exists x G(x) \supset N\, \exists y G(y))$$

по принципу $N(p \supset q) \supset (Mp \supset Mq)$, который является аксиомой или теоремой в любой системе модальной логики, выводим:

$$2.\ M\,\exists x G(x) \supset MN\,\exists \mathrm{y}\mathrm{G}(\mathrm{y})$$

Следующий шаг основан на принципе $MNp \supset Np$, который является одной из форм аксиомы S5, самый сильной из стандартных систем модальной логики высказываний:

$$3.\ M\,\exists x G(x) \supset N\,\exists y G(\mathrm{y}).$$

Т.е., данное доказательство «проходит» только в системе S5. Хотя следует заметить, что Гёдель прямо не говорит об этом, но неявно опирается на принцип S5 $MNp \supset Np$, отмечая в своих записках, что «если необходимое существование является непротиворечивым, тогда существуют вещи, которые им обладают».

Следует отметить еще одну проблему в логическом доказательстве Гёделя. В Определении 2:

$$F \text{ ess } x \equiv \forall H\,[H(x) \supset N\,\forall x(H(x) \supset F(x))]$$

говорится о том, что для свойства F быть сущностью предмета x означает, что любое свойство, присущее данному предмету, с необходимостью включается в свойство F. Но тогда из наличия свойства, с необходимостью отсутствующего у всех объектов, можно было бы вывести, что оно-то и является сущностью x, а с Определением 3 это означало бы, что ни один объект не обладает свойством E. Дана Скотт добавляет к этому определению конъюнкт $F(x)$, что, вероятно, вполне соответствует намерениям самого Гёделя.

Принимая условное утверждение, что если существование Бога возможно, то Бог существует, для доказательства существование Бога надо отделить консеквент и вывести по модус поненс, что Бог действительно существует. Следовательно, нужно доказательство возможности понятия Бога, т.е. его непротиворечивости. Но тут у Лейбница мы сталкиваемся с двумя трудностями. Первая состоит в том, что у него это понятие предполагает максимум совершенства, например "Наибольшее количество", и может оказаться невозможным. На это затруднение указывает сам Лейбниц. Вторая трудность, не отмеченная Лейбницем, состоит в том, что, как правило в онтологическом аргументе, предполагается доказательство, что существование Бога либо невозможно, либо необходимо — $M\,\exists xG(x) \supset N\,\exists yG(y)$. Но почему бы тогда также «легко» не предположить возможность несуществования Бога, как и возможность существования Бога? Поэтому для онтологического аргумента необходимо дать доказательство возможности существование Бога.

Доказательство Гёделем возможности отличается от лейбницевского, и позволяет избежать указанные трудности, хотя и имеет другие недостатки. Его определение позитивного свойства существенно отличается от понятия совершенства Лейбница. Он говорит просто об индивидах входящих в область действия предиката как об обладающих соответствующим свойством. Синтаксические определения G и E не ограничивают свойства, например x=x, а x≠x, а просто утверждают их, как соответствующие пропозициональной функций одной индивидуальной переменной.

Это, безусловно, позволяет Геделю отстаивать положение — Аксиому 4 ($P(E)$), что необходимо существование является положительным свойством, которое он использует, утверждая, что существование Бога является необходимым, если это возможно. Для необходимого существования, по Геделю, достаточно соответствуют пропозициональной функции одного индивидуального переменной. И понятие свойства не ограничивается в своем применении какой-нибудь категорией, которая может быть очевидным основанием для исключения необходимого существования.

Во-вторых, Гедель предлагает несколько толкований смысла "позитивного" или "совершенного". Только его ранняя трактовка напоминает лейбницевскую. Согласно его поздней интерпретации, "позитивный — означает положительное в моральном эстетическом смысле, независимо от случайного структуры мира". Она определяет «позитивный» как значение предиката, и указывает на то, что является положительным обязательно положительно, для любого предиката по Аксиоме 3. Это не определяет логические свойства положительности (позитивности), которые могут иметь большую значимость в доказательстве взаимной согласованности (непротиворечивости) всех положительных свойств.

Но Гёдель также определяет и важное логическое свойство (чистой) положительности. В отличие от Лейбница, который определил совершенство и чисто положительные свойства в более общем смысле, в котором отрицание не играет никакой роли в их внутренней логической структуре, Гедель характеризует чисто положительные свойства, или "совершенства", в плане того, что из них следует (что из них выводимо). Важность этого указывает сам Гёдель в своих записях: «Из основной аксиомы выводится (по существу): Свойство совершенно только если из него не следует отрицание совершенства». Эта аксиома — это аксиома 5, которая «работает» в доказательстве вместе с аксиомой 2.

Именно этот способ конструирования концепции чисто положительного свойства и порождает доказательство возможности существования Бога. Гедель предполагает, что сумма всех положительных свойств само по себе является положительным свойством (Аксиома 1), и что положительные свойства подразумевают только положительные свойства (Аксиома 5). Из этих предположений следует, что "система всех положительных свойств непротиворечива", и, следовательно, существование Бога, как носителя всех положительных свойств, возможно.

Эта доказательство возможности не зависит от спорного предположения Лейбница, что единственный способ, которым свойства могут быть несовместимы является формальное противоречие, появляющееся в процессе их конструирования. Это преимущество, однако, может быть важнее его недостатка. Если принять предположения Лейбница, т.е считать, что все чисто положительные качества согласованы друг с другом, то мы получаем определенного рода объяснения того, почему они согласуются, а именно потому что нет никаких способов, в котором они могли бы быть взаимно противоречивы.

У Гёделя мы не находим подобного обоснования. Взаимная непротиворечивость всех чисто положительных свойств должна выводиться, и может иметь недостаточную доказательную силу, чтобы это установить. Сам Гедель, в своей записной книжке, заявляет, что он "по существу говорит о том, что положительные свойства образуют максимальную совместимую и непротиворечивую систему". Но тогда есть ли у нас достаточные основания полагается на Аксиому 5?

В завершении мы дадим реконструкцию доказательства онтологического аргумента Геделя (В.В. Горбатов):

Доказательство

1.	$G(x)$	доп.
2.	$\forall F(P(F) \rightarrow F(x))$	Определение 1
3.	$\forall F(F(x) \rightarrow P(F))$	(2) Аксиома 2
4.	$\forall F(\mathrm{F}(\mathrm{x}) \rightarrow \Box P(F))$	(3) Аксиома 3
5.	$\forall F(F(x) \leftrightarrow \Box F(x))$	(2,4)
6.	$G(\mathrm{x}) \rightarrow \forall F(F(x) \leftrightarrow \Box F(x))$	(5)
7.	$\forall x(G(x) \rightarrow \forall F(F(x) \leftrightarrow \Box F(x)))$	(6)
8.	$\forall F(F(x) \rightarrow \forall x(G(x) \leftrightarrow \Box F(x))$	(7)
9.	$\forall F(F(x) \rightarrow \Box \forall x(F(x) \leftrightarrow G(x))$	(8)
10.	G ess x	(9) Определение 2
11.	$G(x) \rightarrow G$ ess x	(10)
12.	$P(E)$	Аксиома 4
13.	$G(x) \rightarrow E(x)$	(12) Определение 1
14.	$\mathrm{E(x)} \rightarrow (\mathrm{G\ ess\ x} \rightarrow \Box\exists \mathrm{xG(x)})$	Определение 3
15.	$\mathrm{G(x)} \rightarrow \Box\exists \mathrm{yG(y)}$	(10-14)
16.	$\Diamond\exists \mathrm{xG(x)} \rightarrow \Diamond\Box\exists \mathrm{yG(y)}$	из (15) по аксиоме $\Box(\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{B})\rightarrow(\Diamond\mathrm{A}\rightarrow\Diamond\mathrm{B})$
17.	$\Diamond\exists \mathrm{xG(x)}$	(из Аксиом 1 и 5 доказывается, что понятие *G* логически непротиворечиво)
18.	$\Diamond\exists \mathrm{xG(x)}$	(17)
19.	$\Diamond\exists \mathrm{xG(x)} \rightarrow \Diamond\Box\exists \mathrm{yG(y)}$	(16)
20.	$\Diamond\Box\exists \mathrm{yG(y)} \rightarrow \Box\exists \mathrm{yG(y)}$	S5 по аксиоме $\Diamond\Box\mathrm{A}\rightarrow\Box\mathrm{A}$
21.	$\Box\exists \mathrm{yG(y)}$	

Заключение

Наверное, имеет определенный смысл такое мнение, что никакое доказательство никогда не может считаться действительным, если его выводы достаточно парадоксальными и неутешительными. В основаниях математики таким примером может служить аксиома выбора. В то время как аксиома выглядит безобидно, он имеет ряд неприятных последствий, таких, как теорема Банаха-Тарского. Те, кто находит выводы теоремы Банаха-Тарского неприемлемыми, как правило, винят в этом аксиому выбора. С другой стороны, те, кто находит выводы доказательства особенно привлекательными часто принимают его, даже если они явно ошибочны. Например, мы знаем, что аксиоматизация геометрии, предложенной Евклидом, является неудовлетворительным, поскольку она делает необоснованные предположения о строении нашего пространства. Этот факт был забыт на протяжении веков, потому что результаты евклидовой геометрии были чрезвычайно успешными. Это не означает, что математика не опирается тем или иным образом на внешнюю реальность. Тем не менее, математика не сухое развитие лемм, следствий и теорем из аксиом и постулатов. Существует более сложные и динамичные отношения между математическим доказательством и его заключениями.

Если это так в математике, то тем более, это так в философии и теологии. Тот, кто находит выводы аргумента Геделя «неприятными», готов критиковать их по всем направлениям. Концепция необходимости и положительного свойства, возможно расплывчата и не выглядит удовлетворительной. Но, возможно, что критика онтологического аргумента может быть защищена в той или иной форме, в любом случае онтологические аргументы упорно сохраняют свое присутствие в религиозной и философском дискурсе, несмотря их проницательную критику.

Те, кто находит условия онтологического аргумента подозрительными должны, наверное, задуматься, основывается ли их подозрения, как и в случае теоремы Банаха-Тарского, на нежелании согласиться с выводом аргумента. Те, кто находит условия онтологического доказательства приемлемыми, должны спросить себя, не были ли они слишком снисходительны к двусмысленностям логики и модальной логики в частности. Представляется, что каждый из этих подходов ошибочен. Каждый шаг аргумента следует судить по существу.

Хотя следствия онтологического аргумента кажутся подозрительными, кажется, что нам есть чему поучиться, изучив, например, следствия определенных онтологических допущений. Возможно, доказательство Геделя дает нам возможность изучить формальную "архитектуру" Вселенной, если ее рассматривать как неоплатоническую конструкцию в самом широком смысле. Определение Бога, как воплощение всех положительных свойств, построенное из совокупности всех положительных простых предикатов, являются ключевым пунктом аргумента. А положение, что это совокупность положительных предикатов замкнуто относительно их конъюнкции является основанием конструкции всего аргумента. Если нет такой вещи, как положительных свойств то вся конструкция аргумента повисает в воздухе. С другой стороны, может быть, положительные свойства существуют. Такие свойства, как всеведение, вездесущность и всемогущество может быть, возможно, изучать, чтобы определить, что следует из этого и как мы могли бы это понять. Кроме того, мы можем взять аксиомы как некоторую данность, и поискать те свойства, которые удовлетворяют аксиомам. Тогда перевернув логическую структуру аргумента с ног на голову, можно было бы проанализировать, что мы понимаем под Богом.

В какой степени Бог аргумента Геделя совместим с современной научной картиной мира? Онтологический аргумент пытается обосновать все существующие вещи в необходимом существе, а именно в Боге. Аналогичным образом, фундаментальная наука пытается обосновать явления нашего мира в более глубоком типе необходимости. Физические законы не просто логически необходимы, но необходимы в большей степени, чем простые факты, потому что они, как предполагается, истинны во все времена и во всем пространстве. Таким образом, между поиском фундаментальной общефизической теории и доказательство необходимого Существа, в котором находится основа нашего мира, можно провести определённую аналогию. Возможно, это и есть цель аргумента Геделя в смысле научного поиска некоторой окончательной теории.

Подразумевает ли аргумент Геделя пантеизм? То есть, можно ли максимальную положительность Бога идентифицировать с вселенной? Ответ на этот вопрос зависит как от нашего понимания вселенной, так и Бога.

Многие ученые и мыслители восхищаются Куртом Геделем как величайшим логиком XX века, но оказались несколько смущены его онтологического доказательством. Однако представляется, что его онтологический аргумент не аберрация его мысли, а неотъемлемой часть творчества одного из самых замечательных мыслителей XX века.

Литература

‘Дискуссия по основаниям математики’ (2010) *Философия и естествознание. Журнал («Познание»). Избранное*, М. с. 60-81.

Лейбниц, Г.В. (1982) ‘Есть Совершеннейшее Существо’, в Лейбниц Г.В. *Сочинения в четырех томах*, том 1, М.: Мысль, с. 116-117.

Манин, Ю.И. (2010) ‘Истина, строгость и здравый смысл’, в Манин Ю.И. *Математика как метафора*, М.: МЦНМО, с. 75-91.

Пушкарский, А.Г. (2009) ‘Первое упоминание теоремы Гёделя’, *РАЦИО.ru*, №1, с. 132-143.

Улам, С.М. (2001) *Приключения математики,* Ижевск.

Adams, R. (1995) ‘Introductory note to *1970’, in Gödel K. *Collected Works,* vol. 3, Feferman, S., Dawson, J., Kleene, S., Moore, G., Solovay, R., and van Heijenoort, J. (eds.). Oxford – New York: Oxford University Press, pp. 388-402.

Anderson, C.A. and Gettings, M. (1996) ‘Gödel's Ontological Proof Revisited’, in *Gödel '96: logical foundations of mathematics, computer science and physics - Kurt Godel's legacy*, Brno, Czech Republic, proceedings, Petr Hajek (ed.), Berlin, Heidelberg, New York, Barcelona, Budapest, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokyo: Springer, pp. 167-172.

Erkenntnis Bd.2 H.3 (1931), Leipzig: Meiner Verlag, pp. 135-151.

Gödel, K. (1995) *Collected Works,* vol. 3, Feferman, S., Dawson, J., Kleene, S., Moore, G,. Solovay, R., and van Heijenoort, J. (eds.), Oxford – New York: Oxford University Press, pp. 403.

Wang, Hao (1987) *A Logical Joinery: From Gödel to Philosophy*, Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

Об авторе

Анатолий Геннадьевич ***Пушкарский*** — старший преподаватель кафедры философии Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта, pushcarskiy@mail.ru.

About author

Anatoly ***Pushkarsky***, Assistant Professor, Department of Philosophy, Immanuel Kant Baltic Federal University, pushcarskiy@mail.ru.