

УДК 513.73

Е.Т.Ивлев, Э.Н.Подскребко, А.М.Сухотин

О НОРМАЛИЗАЦИИ ОСНАЩЕННОЙ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ
ПРОСТРАНСТВА ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ

Настоящая статья посвящена построению поля нормалей первого и второго рода m -поверхности S_m в $R_{n,n}$. Когда на m -поверхности S_m задано: 1/ поле гиперплоскостей, каждая гиперплоскость которого проходит через текущую точку S поверхности S_m , но не содержит соответствующую касательную m -плоскость L_m ; 2/ поле прямых, каждая прямая ℓ которого проходит через S , но не принадлежит L_m ; 3/ поле двумерных плоскостей, каждая плоскость L_2 которого пересекает плоскость по прямой ℓ_1 , проходящей через S . При этом данная статья содержит результаты, полученные Е.Т.Ивлевым для случая 1/, Э.Н.Подскребко для случая 2/ при $n=2m$ и А.М.Сухотиным для случая 3/ при $n \leq m(m-1)$.

Обозначения и терминология соответствует принятым в [1] и [2]. Условимся в дальнейшем символом [I](p) обозначать формулу стоящую под номером (p) в статье [I].

§1. Оснащение m -поверхности S_m полями некоторых линейных пространств в слое R_n .

Пусть в пространстве $R_{n,n}$ задана m -поверхность S_m , определяемая относительно некоторого репера $T = \{A_j\}$ (здесь и в дальнейшем принимается система индексов, о которой идет речь в [I]) слоя точки S этой поверхности дифференциальными уравнениями [I](7) и их продолжениями [I](9) и [I](11).

1. Рассмотрим гиперплоскость, не проходящую через m -плоскость [I](6), но содержащую точку A_0 , которая в локальных координатах репера T слоя R_n точки A_0 определяется

уравнением

$$x^m = \ell_u x^u + \ell_\alpha x^\alpha, \quad (u, v = 1, \dots, m-1) \quad (1.1)$$

Здесь величины ℓ_u и ℓ_α удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} d\ell_u + \ell_u \omega_m^m + \omega_u^m - \ell_v (\ell_u \omega_v^m + \omega_u^v) &= \ell_{u\alpha} \omega^\alpha, \\ d\ell_\alpha + \ell_\alpha \omega_m^m + \omega_\alpha^m - \ell_v (\ell_\alpha \omega_v^m + \omega_\alpha^v) &= \ell_{\alpha u} \omega^u. \end{aligned} \quad (1.2)$$

2. Каждой точке A_0 поверхности S_m в слое R_n этой точки поставим в соответствие прямую ℓ , проходящую через A_0 , но не лежащую в L_m , причем в локальных координатах слоя R_n точки A_0 эту прямую определим системой:

$$x^\alpha = c^\alpha x^p, \quad x^r = c^r x^n, \quad (p, q = m+1, \dots, n-1). \quad (1.3)$$

Здесь величины c^α и c^r удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} dc^\alpha - c^\alpha \omega_n^n + c^\beta \omega_\beta^\alpha + \omega_n^\alpha - c^\alpha c^r \omega_r^n &= c_\beta^\alpha \omega^\beta, \\ dc^r - c^r \omega_n^n + \omega_n^r + c^q \omega_q^r + c^r c^t \omega_t^r &= c_p^r \omega^p. \end{aligned} \quad (1.4)$$

3. Каждой точке A_0 m -поверхности S_m в слое R_n этой точки поставим в соответствие двумерную плоскость L_2 , определяемую в локальных слоевых координатах системой

$$x^u = f^u x^m + g^u x^n, \quad x^r = g^r x^n. \quad (1.5)$$

Здесь величины g^u , f^u и g^r удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} dg^u - g^u \omega_n^n - g^r \omega_r^u - f^u \omega_n^u - g^r f^u \omega_r^m - g^v f^u \omega_v^m + \omega_n^u + g^r \omega_r^u + g^v \omega_v^u &= g_\alpha^u \omega^\alpha, \\ df^u - f^u \omega_m^m - f^v \omega_v^u + \omega_m^u + f^v \omega_v^u &= f_\alpha^u \omega^\alpha, \\ dg^r - g^r \omega_n^n - g^q \omega_q^r + \omega_n^r + g^q \omega_q^r &= g_\alpha^r \omega^\alpha. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Заметим, что плоскость L_2 , заданная системой (1.5), проходит через точку A_0 и пересекает плоскость L_m по прямой ℓ_1 , определяемой системой:

$$x^u = f^u x^m, \quad x^\alpha = 0 \quad (1.7)$$

Отметим, что дифференциальные уравнения (1.2), (1.4) и (1.6) предполагаются замкнутыми. При этом результат их замыкания с использованием структурных уравнений [I](1) мы не выписываем.

§2. Нормализация m -поверхности S_m , оснащенной полем гиперплоскостей

1. Так же, как и в [4, с. 79-80] найдем, что в силу (1.1) - (1.3) система

$$x^m = \ell_u x^u + \ell_\alpha x^\alpha, \quad (\delta_\alpha^m x^\alpha + \Phi_{u\alpha}^m x^u + \Phi_{\alpha\alpha}^m x^\alpha \dots) t^\alpha = 0, \quad (2.1)$$

где $\Phi_{u\beta}^{\hat{z}} = A_{u\beta}^{\hat{z}} + \ell_u A_{m\beta}^{\hat{z}}$; $\Phi_{m\beta}^{\hat{z}} = A_{m\beta}^{\hat{z}}$; $\Phi_{uv}^m = (\ell_v \ell_{um} + \ell_u \ell_v) - \ell_2 (\Phi_{uv}^{\hat{z}} + \ell_v \Phi_{um}^{\hat{z}})$;
 $\Phi_{2m}^m = \ell_{2m} - \ell_2 \ell_\beta \Phi_{mm}^{\hat{z}}$; $\Phi_{um}^m = \ell_{um} - \ell_2 \Phi_{um}^{\hat{z}}$;
 $\Phi_{2u}^m = \ell_{2u} + \ell_u \ell_{2m} - \ell_\beta \ell_2 (\Phi_{mu}^{\hat{z}} + \ell_u \Phi_{mm}^{\hat{z}})$, (2.2)

определяет в слое P_n точки A_0 поверхности S_m характеристику гиперплоскости (I.I) в направлении $t = (A_\alpha, A_\alpha) t^\alpha \in L_m$, (2.3)

т.е. пересечение гиперплоскости (I.I) со своей смежной в этом направлении.

Из уравнений (I.2) следует, что величины (2.2) удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$d\Phi_{\beta\gamma}^{\hat{z}} + \Phi_{\beta\gamma}^{\hat{z}} \bar{\omega}_0^\circ - \Phi_{\beta\sigma}^{\hat{z}} \bar{\omega}_\sigma^\circ - \Phi_{\sigma\gamma}^{\hat{z}} \bar{\omega}_\sigma^\circ + \Phi_{\beta\gamma}^{\hat{z}} \bar{\omega}_\beta^\circ = \Phi_{\beta\gamma\tau}^{\hat{z}} \bar{\omega}_\tau^\circ,$$

$$d\Phi_{u\alpha}^m + \Phi_{u\alpha}^m (\bar{\omega}_0^\circ + \bar{\omega}_m^\circ) - \Phi_{u\gamma}^m \bar{\omega}_\alpha^\circ - \Phi_{w\alpha}^m \bar{\omega}_u^\circ - \delta_\alpha^m \bar{\omega}_u^\circ = \Phi_{u\alpha\tau}^m \bar{\omega}_\tau^\circ, \quad (2.4)$$

$$d\Phi_{\alpha\alpha}^m + \Phi_{2\alpha}^m (\bar{\omega}_0^\circ + \bar{\omega}_m^\circ) - \Phi_{\beta\alpha}^m \bar{\omega}_2^\circ - \Phi_{2\gamma}^m \bar{\omega}_\alpha^\circ - \Phi_{u\alpha}^m \bar{\omega}_2^\circ - \delta_\alpha^m \bar{\omega}_\alpha^\circ = \Phi_{2\alpha\tau}^m \bar{\omega}_\tau^\circ,$$

где $\bar{\omega}_0^\circ = \omega_0^\circ$, $\bar{\omega}_u^\circ = \omega_u^\circ$, $\bar{\omega}_m^\circ = \omega_m^\circ - \ell_u \omega_u^\circ$, $\bar{\omega}_u^\circ = \ell_u \omega_m^\circ + \omega_u^\circ$, $\bar{\omega}_m^\circ = \omega_m^\circ$,

$$\bar{\omega}_m^\circ = \omega_m^\circ, \bar{\omega}_u^\circ = \omega_m^\circ \ell_u + \omega_u^\circ, \bar{\omega}_m^\circ = \omega_m^\circ - \ell_2 \omega_m^\circ - \ell_v \omega_m^\circ, \bar{\omega}_2^\circ = \omega_2^\circ + \ell_2 \omega_m^\circ, \bar{\omega}_2^\circ = \omega_2^\circ + \ell_2 \omega_m^\circ.$$

Из 2.I следует, что характеристический элемент гиперплоскости (I.I), т.е. пересечение характеристик этой гиперплоскости вдоль всех направлений (2.3), определяется в локальных слоевых координатах системой:

$$x^\circ = c_2^\circ x^2, \quad x^\alpha = c_2^\alpha x^2, \quad (2.5)$$

где $c_2^\alpha = -\Phi_{2v}^m \Phi^{vu}$, $c_2^\alpha = c_2^\alpha \ell_u + \ell_2$, $c_2^\circ = -(\Phi_{um}^m c_2^\alpha + \Phi_{2m}^m)$, (2.6)

$$\Phi_{uv}^m \Phi^{uv} = \Phi_{uv}^m \Phi^{uv} = \delta_u^v. \quad (2.7)$$

Здесь предполагается, что $\det[\Phi_{uv}^m] \neq 0$, т.е. из рассмотрения исключается случай, когда размерность характеристического элемента гиперплоскости (I.I) больше $n-m-1$. Из (2.4) получаем, что величины C_2^α , определенные из формул (2.6), удовлетворяют [I](45).

Нормаль P_I первого рода m -поверхности S_m в $P_{n,n}$ в смысле [3] определяется как линейная оболочка точки A_0 и (2.5).

2. Рассмотрим следующие величины

$$\bar{A}_{\beta\sigma} = \Phi_{2\beta}^u \Phi_{u\sigma}^{\hat{z}}, \quad \bar{A}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \bar{A}_{(\alpha\beta)}, \quad \bar{A}_{uv} \bar{A}^{uv} = -\delta_u^v, \quad (2.8)$$

$$\det[\bar{A}_{uv}] \neq 0, \quad \bar{A} = \bar{A}_{mm} + \bar{A}_{um} \bar{A}_{vm} \bar{A}^{uv} \neq 0, \quad \ell^v = \bar{A}_{mu}^{\hat{z}} \bar{A}^{uv},$$

$$\bar{\varepsilon}_w = -(\Phi_{vm}^m + \Phi_{uv}^m \ell^v), \quad \Phi_{2\beta}^u = c_2^\circ \delta_\beta^u + c_{2\beta}^u - c_\beta^v c_2^u \Phi_{v\beta}^{\hat{z}}.$$

С помощью дифференциальных уравнений (2.4), (2.7), [I](46) и [I]45 находятся следующие дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют $\bar{A}_{\beta\sigma}$, ℓ^v и $\bar{\varepsilon}_w$:

$$d\bar{A}_{\beta\sigma} + 2\bar{A}_{\beta\sigma} \bar{\omega}_0^\circ - \bar{A}_{\gamma\sigma} \bar{\omega}_\beta^\circ - \bar{A}_{\beta\gamma} \bar{\omega}_\sigma^\circ = \bar{A}_{\beta\sigma\tau} \bar{\omega}_\tau^\circ,$$

$$d\ell^v = \ell^v \bar{\omega}_m^\circ - \ell^u \bar{\omega}_u^\circ - \bar{\omega}_m^\circ + \ell_\alpha^v \bar{\omega}_\alpha^\circ, \quad (2.9)$$

$$d\bar{\varepsilon}_w = -\bar{\varepsilon}_w \bar{\omega}_0^\circ + \bar{\varepsilon}_u \bar{\omega}_w^\circ - \bar{\omega}_m^\circ + \ell_\alpha^v \bar{\omega}_\alpha^\circ,$$

где $\bar{\omega}_\alpha^\circ = \bar{\omega}_\alpha^\circ$, $\bar{\omega}^2 = \bar{\omega}_2^\circ = 0$, $\bar{\omega}_0^\circ = \bar{\omega}_0^\circ$, $\bar{\omega}_\alpha^\circ = \bar{\omega}_\alpha^\circ - c_\beta^\circ \bar{\omega}_\beta^\circ$,
 $\bar{\omega}_\alpha^\circ = \bar{\omega}_\alpha^\circ - \bar{\omega}_\alpha^\circ c_\beta^\circ$, $\bar{\omega}_\alpha^\circ = \bar{\omega}_\alpha^\circ$, $\bar{\omega}_\alpha^\circ = \bar{\omega}_\alpha^\circ$.

Рассмотрим величины

$$\Lambda_\gamma^v = \ell_\gamma^v - \ell^v \ell^u \Phi_{u\gamma}^m. \quad (2.10)$$

Из (2.9) и (2.4) получаются следующие дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют величины (2.10):

$$d\Lambda_\gamma^v = -\Lambda_\gamma^v (\bar{\omega}_0^\circ - \bar{\omega}_m^\circ) + \Lambda_\beta^v \bar{\omega}_\gamma^\circ - \Lambda_\gamma^v \bar{\omega}_\beta^\circ + (\delta_\gamma^v - \ell^v \delta_\gamma^m) (\bar{\omega}_m^\circ - \ell^u \bar{\omega}_u^\circ) - \ell^w \Phi_{w\gamma}^m \bar{\omega}_m^\circ + \Lambda_\gamma^v \bar{\omega}^f$$

Нормаль P_{II} второго рода m -поверхности S_m в $P_{n,n}$ в смысле [3] можно определить по формулам

$$c_u^\circ = \varepsilon_u, \quad (m-1) c_m^\circ = -\Lambda_v^v + \varepsilon_u \ell^u (m-1). \quad (2.11)$$

Так же, как и в [I ст24], показывается, что величины определяют в m -плоскости L_m конус Q_{m-1} :

$$\bar{A}_{\alpha\beta}^{\hat{z}} \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta = 0, \quad \bar{x}^2 = 0,$$

где $\bar{x}^u = x^u$, $\bar{x}^m = x^m - x^u \ell_u - x^2 \ell_2$, $\bar{x}^2 = x^2$.

Следовательно, в силу (2.8) заключаем, что прямая $l = (A, A_m + \ell^v(A + \ell_u A_m))$ полярна $(m-1)$ -плоскости $L_{m-1} = L_{n-1} \cap L_m$ относительно конуса Q_{m-1} . Здесь гиперплоскость L_{n-1} определяется в локальных координатах систем (I.I), причем из рассмотрения исключается случай $\det[\hat{\alpha}_{uv}] = 0$, когда пересечение L_{m-1} с конусом Q_{m-1} вырождается в конус, по крайней мере, с прямолинейной вершиной, и случай $\hat{\alpha} = 0$, когда прямая L является образующей конуса Q_{m-1} .

Из (2.I) в силу (2.8) следует, что характеристика гиперплоскости (I.I) в направлении прямой L пересекает m -плоскость L_m по $(m-2)$ -мерной плоскости, определяемой в локальных координатах системой:

$$\hat{x}^m = 0, \quad \hat{x}^{\hat{\alpha}} = 0, \quad \hat{x}^u = \varepsilon_u \hat{x}^u \quad (2.12)$$

Так же, как и в [I.c.I2-I3], находим, что $(n-m)$ -мерная фокусная алгебраическая поверхность порядка $m-1$ линейного подпространства, проходящего через прямую L и P_I семейства этих подпространств вдоль направлений из L_{m-1} , определяется системой

$$\det \parallel (\hat{x}^u + \varepsilon_w \hat{x}^w) \delta_u^v + \hat{x}^m \Lambda_u^v + \hat{x}^{\hat{\alpha}} \varphi_{2u}^v \parallel = 0. \quad (2.13)$$

Следовательно, точка $U = (1 + \ell^v \ell_v) A_m + \ell^v A_v - \frac{1}{m-1} \Lambda_v^v A_0$ есть точка пересечения m -плоскости L_m с линейной полярной точки A_0 относительно (2.I3). Нормаль P_{II} второго рода m -поверхности S_m в $P_{n,n}$ можно в силу (2.II) определить как линейную оболочку U и (2.I2).

З а м е ч а н и е. Так же, как и в [2 с.29] в случае $T_{(1)}^m$, для направлений из L_{m-1} можно определить гиперконус $T_{(1)}^{m-1}$ класса $(m-1)$ с вершиной L_{m-1} , который можно задать уравнениями (2.6) в [2] при $k=1$, где индексы $\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_m$ принимают значения $m, m+1, \dots, n$, а величины $G_{\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_m}^{\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_m}$ определяются из формул (2.7), в которых вместо $A_{2, \hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_1}$ ($\hat{\alpha}_2 = m, \dots, n$) надо брать $\varphi_{2, \hat{\alpha}_1}^{\hat{\alpha}_1}$ (см. (2.2)). Для гиперплоскости L_{n-1} , определяемой системой (I.I) и проходящей через L_{m-1} , плоскость L_m будет линейным полюсом относительно $T_{(1)}^{m-1}$ тогда и только тогда,

$$\text{когда} \quad G_{(1)}^{m \hat{\alpha}_1 \dots \hat{\alpha}_{m-1}} \ell_{\hat{\alpha}_1}^m \ell_{\hat{\alpha}_2}^m \dots \ell_{\hat{\alpha}_{m-1}}^m \neq 0, \quad G_{(1)}^{\hat{\beta} \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_{m-1}} \ell_{\hat{\alpha}_2}^m \dots \ell_{\hat{\alpha}_{m-1}}^m = 0 \quad (2.14)$$

$$(\ell_{\hat{\alpha}_2}^m = \ell_{\hat{\alpha}_2}^m; \ell_{\hat{\alpha}_m}^m = -1; \hat{\beta} = m+1, \dots, n; \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_{m-1} = m, \dots, n).$$

Так же, как и в [5], можно показать, что система (2.I4) в общем случае определяет конечное число гиперплоскостей L_{n-1} , проходящих через L_{m-1} , для которых L_m есть полюс относительно $T_{(1)}^{m-1}$. В рассматриваемом случае m -поверхность S_m в $P_{n,n}$ оснащается не полем гиперплоскостей L_{n-1} , а полем $(m-1)$ -мерных плоскостей $L_{m-1} \in L_m$. При этом предполагается, что $n \leq m(m-1)$, в противном случае $T_{(1)}^{m-1}$ будет неопределенным. Гиперплоскость L_{n-1} , определяемую системой (2.I4), будем называть ассоциированной $(m-1)$ -плоскости L_{m-1} .

§3. Случай оснащения m -поверхности S_m полем двумерных плоскостей L_2 и прямых ℓ .

I. Пусть на S_m в $P_{n,n}$ при $n \leq m(m-1)$ задано поле двумерных плоскостей (I.5), определяемое дифференциальными уравнениями (I.6) и их продолжениями. Каждой точке A_0 поверхности S_m в слое P_n этой точки поставим в соответствие гиперплоскость Γ_{n-1} , проходящую через L_m , которую определим в локальных координатах системой [I](I.2), где величины ℓ_r удовлетворяют системе [I](I3). Пусть гиперплоскость Γ_{n-1} такова, что $(m+1)$ -плоскость $L_{m+1} = (L_m, A_2 q^2)$ ($q^2=1$), проходящая через L_m и (I.5), есть линейный полюс этой гиперплоскости относительно гиперконуса $T_{(k)}^m$ [2 с.29]. Тогда из (2.6) в [2] следует, что $\ell_{\hat{\alpha}_k} (\ell_{\hat{\alpha}_k} = -1)$ удовлетворяют уравнениям

$$G_{(k)}^{n \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_m} \ell_{\hat{\alpha}_2} \dots \ell_{\hat{\alpha}_m} = \lambda \neq 0, \quad G_{(k)}^{p \hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_m} \ell_{\hat{\alpha}_2} \dots \ell_{\hat{\alpha}_m} = \lambda q^p \quad (3.1)$$

(k - фиксировано, $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_m = m+1, \dots, n$)
Так же, как и в [5 с.1317-1318], можно показать, что система (3.I) в общем случае, т.е. в случае, когда ранг якобиевой матрицы системы (3.I) равен $n-m-1$, определяет конечное число гиперплоскостей Γ_{n-1} , для которых L_{m+1} есть полюс относительно $T_{(k)}^m$.

Из (I.7) следует, что $(m-1)$ -плоскость L_{m-1}^* , проходящая через A_0 и полярная прямой ℓ_1 относительно конуса [I](34), определяется в локальных координатах системой

$$\Lambda_{\alpha\beta} x^\alpha f^\beta = 0, \quad x^2 = 0 \quad (f^m = 1) \quad (3.2)$$

Каждой точке A_0 поверхности S_m в $P_{n,n}$ в слое P_n поставим в соответствие гиперплоскость, проходящую через L_{m-1}^* и ассоциированную ей. В локальных координатах эту гиперплоскость определим системой

$$\Lambda_{\alpha\beta} f^\beta x^\alpha + \theta_2^m x^2 = 0.$$

Здесь θ_2^m определяется из системы типа (2.14), где роль L_{m-1} уже играет (3.2). Следовательно, для нормализации многомерной поверхности S_m в $P_{n,n}$, оснащенной полем двумерных плоскостей L_2 , можно воспользоваться результатами предыдущего параграфа.

2. Пусть на S_m в $P_{n,n}$ при $n = 2m$ задано поле прямых (1.3), определенное дифференциальными уравнениями (1.4) и их продолжениями. Тогда в m -плоскости L_m в общем случае существует единственное направление (2.3), определяемое в силу (1.4) из системы

$$\tilde{C}_\alpha^p t^\alpha = \lambda c^p, \quad \lambda \neq 0, \quad \tilde{C}_\alpha^p = c_\alpha^p - A_{n\alpha}^p - c^q A_{q\alpha}^p, \quad \text{rang } \tilde{C}_\alpha^p = m-1, \quad (3.3)$$

вдоль которого L_m , прямая (1.3) и смежная к ней не выходят из $(m+1)$ -плоскости $L_{m+1}^* = (L_m, A_2) \tilde{C}_\alpha^p (c^\alpha = t)$, содержащей L_m и прямую (1.3). Таким образом, с m -поверхностью S_m в $P_{n,n}$, оснащенной полем прямых (1.3), в случае $n = 2m$ ассоциируется поле двумерных плоскостей, каждая из которых проходит через соответствующие прямые (1.3) и (2.3), определенную (3.3). Поэтому для нормализации многомерной поверхности S_m в $P_{n,n}$ в рассматриваемом случае можно воспользоваться результатами предыдущего пункта настоящего параграфа.

Список литературы

1. И в л е в Е.Т. Об одной нормализации многомерной поверхности пространства проективной связности. - Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 4, Калининград, 1974, 6-28.

2. И в л е в Е.Т. Об оснащении многомерной гиперполосы пространства проективной связности. - Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 5, Калининград, 1974, 25-49.

3. Норден А.П. Обобщение основной теоремы теории нормализации. - Известия высших уч. заведений. Математика", 1966, №2, 55, 9-19.

4. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m -мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I. - Труды геометрического семинара. З.АН СССР ВИНТИ, М., 1971, 49-94.

5. И в л е в Е.Т. О многообразии $E(L, L_m, L_{m+1}^2)$ в n -мерном проективном пространстве P_n . - Сиб. мат. жур., 8, 16, 1967, 1307-1320.