Список литературы

1. *Попов Ю.И.* Сильно взаимные трехсоставные распределения проективного пространства. Калининград, 2003. Деп. в ВИНИТИ. 29.09.2003. № 1743-В2003.

2. *Чакмазян А.В.* Связность в нормальных распределениях нормализованного подмногообразия V_m в P_n //Проблемы геометрии /ВИНИТИ. М., 1987. Т. 10. С. 55—74.

3. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий: Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований //Тр. Моск. математ. общества. 1953. Т. 2. С. 275—382.

4. *Столяров А.В.* Двойственные нормальные связности на регулярной неголономной гиперполосе // Изв. НАНИ ЧР (физ.-мат. науки). Чебоксары, 1996. № 6. С. 9—14.

Yu. Popov

DUAL NORMAL CONNECTIONS OF BASIS SUBBUNDLE OF SH-DISTRIBUTION IN PROJECTIVE SPACE

We introduce dual normal connections, induced in the bundles of the 1-st and 2-nd kind normals of basis Λ-subbundle of the given SH-distribution [1].

УДК 514.75

М.В. Сорокина

(Пензенский государственный педагогический университет)

ОБ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМАХ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНОЙ СТРУКТУРЫ НА КАСАТЕЛЬНОМ РАССЛОЕНИИ ГЛАДКОГО МНОГООБРАЗИЯ

Исследуются инфинитезимальные автоморфизмы канонической почти комплексной структуры, возникающей на касательном расслоении гладкого многообразия, наделенного нелинейной связностью. Получена оценка максимальной размерности алгебры Ли таких автоморфизмов в случае, когда векторное поле инфинитезимального автоморфизма является либо полным, либо вертикальным лифтом векторного поля базы, а также в случае, когда это поле является проектируемым на базу.

1. Пусть *M* — гладкое n-мерное многообразие, *TM* — касательное расслоение над *M*, π: *TM*$\to$*M* — каноническая проекция, (x^i) — локальные координаты на *M*, $(x^A)=(x^i, x^{n+i}=y^i)$ — естественные локальные координаты на *TM*. Пусть ∇ — инфинитезимальная (нелинейная) связность с коэффициентами $N_i^k(x,y)$. Векторные поля $(\delta_A)=(\delta_i,\partial_{n+i})$, где $\delta_i=\partial_i-N_i^k\partial_{n+k}$, $\partial_{n+i}=\partial/\partial y^i$, образуют локальный базис векторных полей на *TM*, адаптированный к структуре почти произведения $T_z(TM)=H_z\oplus V_z$, где H_z — горизонтальное распределение инфинитезимальной связности, V_z — вертикальное распределение. Коммутаторы векторных полей имеют вид: $[\delta_A,\delta_B]=R_{AB}^C\delta_C$, где

$$R_{ij}^{n+k}=\delta_j N_i^k-\delta_i N_j^k,\ R_{in+j}^{n+k}=N_{i\cdot j}^k,\ R_{n+ij}^{n+k}=-N_{j\cdot i}^k,$$

$$R_{ij}^k=R_{in+j}^k=R_{n+ij}^k=R_{n+in+j}^k=R_{n+in+j}^{n+k}=0$$

(точкой обозначается дифференцирование по переменным y). Корепер, дуальный $\{\delta_A\}$, состоит из форм $\delta x^A=(dx^i,\delta y^i)$, где $\delta y^i=dy^i+N_k^i dx^k$.

Распределение горизонтальных площадок связности ∇ определяет на *TM* каноническую почти комплексную структуру *J* ($J^2=-\mathrm{id}$):

$$JX^h = X^v, \quad JX^v = -X^h, \tag{1}$$

где X^h, X^v — горизонтальные и вертикальные лифты векторных полей в связности ∇. Матрица аффинора *J* почти комплексной структуры в адаптированном репере имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, на касательном расслоении имеется касательная структура *I* ($I^2 = 0$), оператор которой действует следующим образом:

$$IX^h = X^v, \quad IX^v = 0.$$

Рассмотрим на *TM* линейную связность $\tilde{\nabla}$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $\tilde{\nabla}$ согласована с почти комплексной структурой *J*,

2) $\tilde{\nabla}$ согласована с касательной структурой *I*.

Такая связность является вполне приводимой связностью Б.Н. Шапукова. Если $\tilde{\nabla}_{\delta_A}\delta_B = \tilde{\Gamma}^C_{AB}\delta_C$, то ненулевые компоненты этой связности можно определить так:

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \tilde{\Gamma}^{n+k}_{in+j} = N^k_{i\cdot j} \equiv N^k_{ij}.$$

2. Векторное поле $\tilde{X} = \xi^A\delta_A$ на *TM* является инфинитезимальным автоморфизмом почти комплексной структуры *J*, если производная Ли от *J* вдоль $\tilde{X}$ равна нулю

$$L_{\tilde{X}}J = 0. \tag{2}$$

В адаптированном базисе (δ_A) уравнения (2) имеют вид:

$$\xi^C(J^P_A R^B_{CP} - J^B_P R^P_{CA}) + \delta_A\xi^C J^B_C - \delta_C\xi^B J^C_A = 0. \tag{3}$$

Пусть $X^C = \xi^i(x)\delta_i + (y^k\partial_k\xi^i + N^i_k\xi^k)\partial_{n+i}$ — полный лифт векторного поля $X = \xi^i(x)\partial_i$ базисного многообразия *M*. Поле

X^C назовем естественным автоморфизмом структуры *J* на *TM*, если $L_{X^C}J = 0$. Распишем уравнения (3) для различных серий индексов. Для $A = i$, $B = j$ имеем

$$\delta_i \xi^{n+j} - \xi^C R^{n+j}_{Ci} = 0. \quad (4)$$

Если $A = i, B = n + j$, то

$$\xi^C R^{n+j}_{Cn+i} + \delta_i \xi^j - \partial_{n+i} \xi^{n+j} = 0. \quad (5)$$

Для $A = n + i, B = j$ имеем уравнения, совпадающие с (5), а для $A = n + i, B = n + j$ — совпадающие с (4).

Уравнения (5) для полного лифта выполнены тождественно, а уравнения (4) эквивалентны

$$L_X N^j_i = 0. \quad (6)$$

Следовательно, если векторное поле $\tilde{X}$ на *TM* есть полный лифт векторного поля базы, то (2) имеет место тогда и только тогда, когда выполнено (6). Имеет место

Теорема 1. *Для тог, чтобы полный лифт* X^C *векторного поля X был инфинитезимальным автоморфизмом почти комплексной структуры J на TM, необходимо и достаточно, чтобы векторное поле X оставляло инвариантной инфинитезимальную связность* ∇.

Из (6) следует, что $L_X N^k_{i \cdot j} = 0$, так как дифференцирование Ли перестановочно с дифференцированием по касательному вектору. Отсюда следует

Теорема 2. *Размерность алгебры Ли естественных инфинитезимальных автоморфизмов почти комплексной структуры не превосходит* $n^2 + n$.

3. Векторное поле $\tilde{X} = \xi^A \delta_A$ на *TM* назовем *абсолютным инфинитезимальным автоморфизмом почти комплексной структуры J*, если наряду с оператором почти комплексной

структуры оно оставляет инвариантной вполне приводимую связность $\tilde{\nabla}$, т. е. имеет место (2) и

$$L_{\tilde{X}}\tilde{\nabla} = 0. \qquad (7)$$

Естественные инфинитезимальные автоморфизмы на *TM*, как известно, сохраняют расслоенную структуру *TM* (сохраняют слои). Наиболее общие автоморфизмы, сохраняющие слои, определяются проектируемыми векторными полями на *TM* [1]. Векторное поле $\tilde{X}$ на *TM* является проектируемым, если $d\pi\tilde{X}$ — векторное поле на *M*. В координатах поле $\tilde{X}$ имеет вид:

$$\tilde{X} = \xi^i(x)\delta_i + \xi^{n+i}(x,y)\partial_{n+i}. \qquad (8)$$

Теорема 3. *Размерность алгебры Ли абсолютных инфинитезимальных автоморфизмов почти комплексной структуры J не превосходит:*

а) $n^2 + 2n$, если алгебра Ли состоит из проектируемых векторных полей;

б) $2n^2 + 2n$, если алгебра Ли состоит из произвольных векторных полей;

в) $2n^2 + n$, если алгебра Ли состоит из вертикальных векторных полей;

г) $n^2 + n$, если алгебра Ли состоит из векторных полей, являющихся вертикальными лифтами векторных полей базы.

Доказательство. В ковариантных производных уравнения (2) и (7) имеют вид:

$$\xi^C(\tilde{\nabla}_C J_A^B - J_P^B S_{AC}^P + J_A^P S_{PC}^B) + \tilde{\nabla}_A \xi^C J_C^B - \tilde{\nabla}_C \xi^B J_A^C = 0, \qquad (9)$$

$$\tilde{\nabla}_A \tilde{\nabla}_B \xi^C - \tilde{\nabla}_A \xi^P S_{BP}^C - \xi^P \tilde{\nabla}_A S_{BP}^C + \xi^P K_{ABP}^C = 0, \qquad (10)$$

где $S_{AB}^C = \tilde{\Gamma}_{AB}^C - \tilde{\Gamma}_{BA}^C - R_{AB}^C$ — компоненты тензора кручения связности $\tilde{\nabla}$, а K_{ABP}^C — компоненты тензора кривизны.

Пусть

$$\xi^C_B = \tilde{\nabla}_B \xi^C - \xi^P S^C_{BP}, \tag{11}$$

тогда, подставив (11) в (9) и учитывая, что $\tilde{\nabla} J^B_A = 0$, получим

$$J^B_C \xi^C_A - J^C_A \xi^B_C = 0. \tag{12}$$

Подставив (11) в (10), получим

$$\tilde{\nabla}_A \xi^C_B + \xi^P K^C_{ABP} = 0. \tag{13}$$

Таким образом, для того чтобы векторное поле $\tilde{X}$ являлось абсолютным инфинитезимальным автоморфизмом почти комплексной структуры *J*, необходимо и достаточно, чтобы функции ξ^A и ξ^B_A являлись решением системы уравнений (11) и (13). Уравнения (11) и (13) представимы в виде, разрешенном относительно первых производных от $2n + 4n^2$ неизвестных функций ξ^A и ξ^B_A, а уравнения (12) накладывают ряд алгебраических условий. Если условия интегрируемости уравнений (11) и (13) выполняются тождественно, то, как известно из [2], общее решение зависит от $r = 2n + 4n^2 - s$ произвольных постоянных, где *s* — число независимых алгебраических условий в (12).

Распишем уравнения (12) для различных серий индексов, получим

$$\xi^{n+j}_i = -\xi^j_{n+i}, \tag{14}$$

$$\xi^j_i = \xi^{n+j}_{n+i}. \tag{15}$$

Если векторное поле $\tilde{X}$ проектируемо на базу, из (11) следует, что $\xi^j_{n+i} = 0$, эти равенства дают n^2 условий на неизвестные функции. Уравнения (14) и (15) также накладывают по n^2 условий. Таким образом, для проектируемого векторного поля, $s = 3n^2$. Следовательно, $r = n^2 + 2n$.

В случае, когда $\tilde{X}$ — произвольное векторное поле на касательном расслоении, уравнения (14) и (15) накладывают на неизвестные функции ξ^A, ξ_A^B по n^2 алгебраических условий. Таким образом, $s = 2n^2$ и, значит, $r = 2n^2 + 2n$.

Если векторное поле $\tilde{X}$ есть вертикальный лифт векторного поля *X* базы, то на $n + 4n^2$ неизвестных функций $\xi^{n+i} = \xi^i(x)$, ξ_A^B уравнения (14), (15) накладывают столько же условий, сколько и для проектируемого векторного поля, — $s = 3n^2$. Следовательно, $r = n^2 + n$.

В случае, когда $\tilde{X}$ — вертикальное поле на *TM*, $r = 2n^2 + n$ в силу того, что на $n + 4n^2$ неизвестных функций уравнения (14), (15) содержат $s = 2n^2$ независимых алгебраических условий.

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Шапуков Б.Н.* Автоморфизмы расслоенных пространств // Труды геометрического семинара. Вып.14. Казань, 1982. С. 97—108.

2. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. М. 1947.

M. Sorokina

ON THE INFINITESIMAL AUTOMORPHISMS OF ALMOST COMPLEX STRUCTURE ON THE TANGENT BUNDLE OF SMOOTH MANIFOLD

We study the infinitesimal automorphisms of almost complex structure on the tangent bundle of smooth manifold with the non-linear connection. It is obtained the estimate of maximum dimensionality of algebra Lie for some types of these automorphisms.

УДК 514.86; 514.743.4