УДК 514.76

Л. А. Игнаточкина
Московский педагогический государственный университет, Россия
ignlia@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-6

Характеристический вектор почти контактной метрической структуры как аффинное движение

Рассмотрены почти контактные метрические многообразия, характеристический вектор которых является аффинным движением. Доказано, что шестой структурный тензор почти контактного метрического многообразия, для которого характеристический вектор является аффинным движением, равен нулю. Доказано, что для таких многообразий контактная форма инвариантна относительно локальной однопараметрической подгруппы, порожденной характеристическим вектором. Рассмотрены почти контактные метрические многообразия, характеристический вектор которых является торсообразующим и аффинным движением. Доказано, что для таких многообразий характеристический вектор ковариантно постоянен в римановой связности метрики, то есть не существует почти контактных метрических многообразий с торсообразующим характеристическим вектором, который был бы аффинным движением, отличным от движения.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, характеристический вектор, аффинное движение, торсообразующее векторное поле

Пусть M^{2n+1} — гладкое многообразие, $n>1$. Напомним [1], что четверка тензорных полей $(\Phi, \xi, \eta, \mathrm{g})$, где Φ — тензорное поле типа (1,1), ξ — векторное поле (называемое *характери-*

Поступила в редакцию 28.05.2022 г.

стическим вектором или *вектором Риба*), η — 1-форма (называемая *контактной формой*), g — риманова метрика, называется *почти контактной метрической структурой*, если

$$\Phi^2 = -id + \xi \otimes \eta,\ \ \eta(\xi) = 1, \Phi(\xi) = 0,\ \eta \circ \Phi = 0,$$

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y),\ X, Y \in X(M),$$

где $X(M)$ — модуль гладких векторных полей. Гладкое многообразие, на котором фиксирована почти контактная метрическая структура, называется *почти контактным метрическим многообразием*. К каждому почти контактному метрическому многообразию внутренним образом присоединено подрасслоение расслоения реперов со структурной группой $\{e\} \times U(n)$. Оно называется *присоединенной* G-*структурой*, а элементы $(m, \xi_m = \varepsilon_0, \varepsilon_a, \varepsilon_{\hat{a}})$, $m \in M$, ее тотального пространства расслоения, называются A-*реперами*. Здесь индексы

$$i, j, k, \ldots = 0, \ldots, 2n;\ a, b, c, \ldots = 1, \ldots, n;$$

$$\hat{a}, \hat{b}, \ldots = n+1, \ldots, 2n;\ \hat{a},\ \ldots = a + n.$$

На пространстве присоединенной G-структуры компоненты тензорных полей почти контактной метрической структуры имеют следующий вид:

$$\Phi^a_b = i\delta^a_b, \Phi^{\hat{a}}_{\hat{b}} = -i\delta^b_a,\ g_{00} = 1,\ g_{\hat{a}b} = g_{b\hat{a}} = \delta^a_b,\ \xi^0 = \eta_0 = 1,$$

остальные компоненты равны нулю.

Ковариантный дифференциал $\nabla\Phi$ в римановой связности ∇ метрики g определяет шесть тензорных полей, которые называются *структурными тензорами* почти контактной метрической структуры. Они определяются через компоненты $\{\Phi^i_{j,k}\}$ ковариантного дифференциала $\nabla\Phi$ следующим образом [1]:

$$B=\left\{B^{i}_{jk}\right\},\, B^{a}_{\hat{b}c}=B^{ab}{}_{c}=-\frac{i}{2}\Phi^{a}_{\hat{b},c},\, B^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}=B_{ab}{}^{c}=\frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}};$$

$$C=\left\{C^{i}_{jk}\right\},\, C^{a}_{\hat{b}\hat{c}}=C^{abc}=\frac{i}{2}\Phi^{a}_{\hat{b},\hat{c}},\; C^{\hat{a}}_{bc}=C_{abc}=-\frac{i}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,c};$$

$$D=\left\{D^{i}{}_{j}\right\},D^{a}_{\hat{b}}=B^{ab}=i\left(\Phi^{a}_{0,\hat{b}}-\frac{1}{2}\Phi^{a}_{\hat{b},0}\right),D^{\hat{a}}{}_{b}=B_{ab}=$$

$$=-i\left(\Phi^{\hat{a}}_{0,b}-\frac{1}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0}\right);$$

$$E=\left\{E^{i}{}_{j}\right\},\; E^{a}{}_{b}=B^{a}{}_{b}=i\Phi^{a}_{0,b},\; E^{\hat{a}}{}_{\hat{b}}=B_{a}{}^{b}=-i\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}};$$

$$F=\left\{F^{i}{}_{j}\right\},\; F^{a}{}_{\hat{b}}=F^{ab}=i\Phi^{0}_{\hat{a},\hat{b}},\; F^{\hat{a}}{}_{b}=F_{ab}=-i\Phi^{0}_{a,b};$$

$$G=\left\{G^{i}\right\}, G^{a}=G_{\hat{a}}=-i\Phi^{0}_{\hat{a},0},\; G^{\hat{a}}=G_{a}=i\Phi^{0}_{a,0},$$

остальные компоненты этих тензорных полей равны нулю. Кроме того, имеют место тождества

$$1)\ \Phi^{\hat{a}}_{b,\,k}=-\Phi^{\hat{b}}_{a,\,k},\ 2)\ \Phi^{\hat{a}}_{0,\,k}=-\Phi^{0}_{a,\,k} \tag{1}$$

и формулы комплексно сопряженные.

Хорошо известно, что в окрестности каждой точки, в которой векторное поле (в частности, характеристический вектор ξ) отлично от нуля, это векторное поле порождает локальную однопараметрическую группу диффеоморфизмов. В связи с этим встает задача выяснить, будут ли геометрические объекты, заданные на почти контактном метрическом многообразии, инвариантны относительно этой группы преобразований. Одним из таких объектов является риманова связность ∇ метрики g. Хорошо известно [2], что локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов, определенная векторным полем X, сохраняет ∇ тогда и только тогда, когда $\nabla L_X(g)=0$, где L_X обозначает производную Ли в направлении векторного поля X. Такое векторное поле называется *аффинным движением*. Изучим свойства почти контактных метрических многообразий, для которых характеристический вектор ξ является аффинным движением. Так как ξ является двойственным векторным полем для контактной формы η, то есть $\eta(X)=g(X,\xi)$, из хорошо известной формулы

$$L_{\xi}(g)(X,Y)=g(\nabla_X\xi,Y)+g(X,\nabla_Y\xi),\quad X,Y\in X(M),$$

получим

$$L_{\xi}(g)(X,Y)=\nabla_X(\eta)Y+\nabla_Y(\eta)X. \qquad (2)$$

Применяя к (2) оператор ковариантного дифференцирования ∇_Z, получим

$$\nabla_Z L_{\xi}(g)(X,Y)=\nabla\nabla(\eta)(X,Y,Z)+\nabla\nabla(\eta)(Y,X,Z). \qquad (3)$$

Из (3) следует, что ξ будет аффинным движением тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры выполняется тождество

$$\eta_{i,\,j,\,k}+\eta_{j,\,i,\,k}=0, \qquad (4)$$

где $\{\eta_{i,j,k}\}$ — компоненты $\nabla\nabla(\eta)$ на пространстве присоединенной G-структуры. Выразим их через компоненты структурных тензоров и их ковариантные производные. По основной теореме тензорного анализа для $\nabla\eta$ имеем

$$d\eta_{i,\,j}-\eta_{k,\,j}\theta_i^k-\eta_{i,\,k}\theta_j^k=\eta_{i,\,j,\,k}\omega^k, \qquad (5)$$

где $\{\theta_i^k\}$ — тензорные компоненты римановой связности ∇, а $\{\omega^k\}$ — тензорные компоненты формы смещения. Из основной теоремы тензорного анализа для η и (1) получаем, что

$$\eta_{a,\,b}=-F_{ab},\ \eta_{\hat{a},\,b}=B^a{}_b,\ \eta_{a,\,0}=G_a,\ \eta_{0,\,k}=0 \qquad (6)$$

и формулы комплексно сопряженные. Из (5) и (6) следует:

$$\begin{aligned}
&1)\ \eta_{a,\,b,\,c} = -F_{abc} - B^{d}{}_{b}C_{dac} - B_{a}{}^{d}C_{dbc} - G_{a}F_{bc}\,,\\
&2)\ \eta_{a,\,b,\,\hat{c}} = -F_{ab\hat{c}} + B^{d}{}_{b}B_{da}{}^{c} + B_{a}{}^{d}B_{db}{}^{c} + G_{a}B_{b}{}^{c}\,,\\
&3)\ \eta_{a,\,b,\,0} = -F_{ab0} + B^{c}{}_{b}\left(B_{ca} + F_{ca}\right) + B_{a}{}^{c}\left(B_{cb} + F_{cb}\right) + G_{b}G_{a}\,,\\
&4)\ \eta_{\hat{a},\,b,\,c} = B^{a}{}_{bc} - F_{db}B^{da}{}_{c} + F^{ad}C_{dbc} - G^{a}F_{bc}\,,\\
&5)\ \eta_{\hat{a},\,b,\,\hat{c}} = B^{a}{}_{b\hat{c}} + F_{db}C^{dac} - F^{ad}B_{db}{}^{c} + G^{a}B_{b}{}^{c}\,,\\
&6)\ \eta_{\hat{a},\,b,\,0} = B^{a}{}_{b0} + F_{db}B^{ad} - F^{ad}B_{db} + G^{a}G_{b}\,,\\
&7)\ \eta_{a,\,0,\,c} = G_{ac} - G^{d}C_{dac} + F_{ad}B^{d}{}_{c} + B_{a}{}^{d}F_{dc}\,,\\
&8)\ \eta_{a,\,0,\,\hat{c}} = G_{a\hat{c}} + G^{d}B_{da}{}^{c} - F_{ad}F^{dc} - B_{a}{}^{d}B_{d}{}^{c}\,,\\
&9)\ \eta_{a,\,0,\,0} = G_{a0} - G^{d}B_{ad} - B_{a}{}^{d}G_{d}\,,\\
&10)\ \eta_{0,\,0,\,c} = -G_{d}B^{d}{}_{c} + G^{d}F_{dc}\,,\\
&11)\ \eta_{0,\,a,\,c} = F_{da}B^{d}{}_{c} + B^{d}{}_{a}F_{dc}\,,\\
&12)\ \eta_{0,\,a,\,\hat{c}} = -F_{da}F^{dc} - B^{d}{}_{a}B_{d}{}^{c}\,,\\
&13)\ \eta_{0,\,a,\,0} = F_{da}G^{d} - B^{d}{}_{a}G_{d}\,,\\
&14)\ \eta_{0,\,0,\,0} = -2G^{d}G_{d}
\end{aligned} \qquad (7)$$

и формулы комплексно сопряженные. Системы функций $\{F_{abk}\}, \{G_{ak}\}, \{B^{a}{}_{bk}\}$ определяются уравнениями

$$1)\ dF_{ab} - F_{cb}\theta^{c}_{a} - F_{ac}\theta^{c}_{b} = F_{abk}\omega^{k}\,,\ 2)\ dG_{a} - G_{c}\theta^{c}_{a} = G_{ak}\omega^{k}\,,$$

$$3)\ dB^{a}{}_{b} - B^{a}{}_{c}\theta^{c}_{b} + B^{c}{}_{b}\theta^{a}_{c} = B^{a}{}_{bk}\omega^{k}\,. \qquad (8)$$

Из (4) и (7_{14}) следует, что норма $\| G^{d} \| = 0$, следовательно, шестой структурный тензор равен нулю. Тем самым доказана теорема.

Теорема 1. *Если характеристический вектор ξ почти контактного метрического многообразия является аффинным движением, то шестой структурный тензор G равен нулю.*

Подставляя (7) в (4), получаем критерий.

Теорема 2. *Характеристический вектор* ξ *является аффинным движением тогда и только тогда, когда*

$$
\begin{aligned}
&1)\ G^a = 0,\ 2)\ F_{(ab)0} = -\left(B^c{}_{(a} + B_{(a}{}^c\right)\left(B_{b)c} + F_{b)c}\right),\\
&3)\ \left(F_{ad} + F_{da}\right)B^d{}_c + \left(B_a{}^d + B^d{}_a\right)F_{dc} = 0,\\
&4)\ B^a_{b0} + F_{db}B^{ad} - F^{ad}B_{db} + B_b{}^{a0} - F_{bd}B^{da} + F^{da}B_{bd} = 0,\\
&5)\ \left(F^{ad} + F^{da}\right)F_{dc} + \left(B^a{}_d + B_d{}^a\right)B^d{}_c = 0,\\
&6)\ F_{(ab)c} = -\left(B^d{}_{(a} + B_{(a}{}^d\right)C_{b)dc},\\
&7)\ B^a{}_{bc} + B_b{}^a{}_c - \left(F_{db} + F_{bd}\right)B^{da}{}_c + \left(F^{ad} + F^{da}\right)C_{dbc} = 0,\\
&8)\ F_{(ab)\hat{c}} = -\left(B_{(a}{}^d + B^d{}_{(a}\right)B_{b)d}{}^c,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где круглые скобки обозначают симметризацию по индексам, заключенным в них.

Рассмотрим инвариантность тензорных полей относительно локальной однопараметрической группы, порожденной ξ. Будем говорить при этом, что характеристический вектор ξ *сохраняет тензорное поле*. Характеристический вектор ξ сохраняет контактную форму η тогда и только тогда, когда шестой структурный тензор G обращается в нуль [3]. Откуда получается

Теорема 3. *Если характеристический вектор* ξ *почти контактного метрического многообразия является аффинным движением, то* ξ *сохраняет контактную форму* η.

В [4] были изучены некоторые классы почти контактных метрических многообразий с характеристическим вектором ξ, который одновременно является аффинным движением и торсообразующим векторным полем. Рассмотрим общий случай почти контактного метрического многообразия, характеристический вектор которого является торсообразующим вектором и аффинным движением. Напомним, что векторное поле ξ называется *торсообразующим*, если

$$\nabla\xi = \rho id + a \otimes \xi \ ,$$

где a — некоторая 1-форма, ρ — некоторая гладкая функция на M . Эти форму и функцию называют *определяющими элементами* торсообразующего векторного поля. На пространстве присоединенной G-структуры это условие записывается в виде

$$1)\ B^a{}_b = \rho\delta^a_b,\ 2)\ F_{ab} = 0,\ 3)\ G_a = 0,\ 4)\ a_b = 0,\ \rho + a_0 = 0 \quad (10)$$

и формулы комплексно сопряженные. Здесь $\left\{a_b, a_{\hat{b}}, a_0\right\}$ — компоненты формы a на пространстве присоединенной G-структуры. Применим оператор внешнего дифференцирования d к (10_1) и подставим в получившееся выражение (8_3). Тогда

$$1)\ B^a{}_{bc} = \rho_c\delta^a_b,\ 2)\ B^a{}_{b\hat{c}} = \rho_{\hat{c}}\delta^a_b,\ 3)\ B^a{}_{b0} = \rho_0\delta^a_b, \qquad (11)$$

где $d\rho = \rho_k\omega^k$. Аналогично из (8_1) и (10_2) получим

$$F_{abk} = 0 . \qquad (12)$$

Отметим, что если $F_{ab} = 0$, то из определения B_{ab} с учетом (1) следует, что B_{ab} кососимметричны по индексам $a, b.$ С учетом этого подставим (10—12) и комплексно сопряженные формулы в формулы (9). Получим

$$\rho_0 = 0, \rho_c = 0, \rho^2\delta^a_c = 0 .$$

Сворачивая по индексам a, c последнее равенство, получаем $\rho = 0$. Откуда с учетом (10_4) получаем, что $a = 0$. Тогда $\nabla\xi = 0$. Тем самым доказана

Теорема 4. *Если характеристический вектор ξ почти контактного метрического многообразия является торсообразующим векторным полем и аффинным движением, то его определяющие элементы нулевые, а ξ ковариантно постоянен в римановой связности метрики g .*

Так как контактная форма η и характеристический вектор ξ двойственны, то есть $g\left(\nabla_X\xi, Y\right) = \nabla_X\left(\eta\right)Y$, из теоремы 4 с учетом (2) получаем

Следствие. *Если характеристический вектор* ξ *почти контактного метрического многообразия является торсообразующим векторным полем и аффинным движением, то он сохраняет метрику* g *(такие векторные поля называются движениями, или киллинговыми векторными полями). Другими словами, не существует почти контактных метрических многообразий с торсообразующим характеристическим вектором* ξ*, который был бы аффинным движением, отличным от движения.*

Список литературы

1. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях : монография. Одесса, 2013.

2. *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. М., 2003.

3. *Игнаточкина Л.А, Никифорова А.В.* Инвариантность почти контактной метрической структуры гладкого многообразия относительно характеристического вектора // Классическая и современная геометрия (Москва, 1—4 ноября 2021 г.). М., 2021. С. 75—76.

4. *Терпстра М. А.* О геометрии характеристического вектора почти контактных метрических структур : дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 2011.

MSC 2010: 53C15, 53D15

L. A. Ignatochkina
Moscow Pedagogical State University
1/1 M. Pirogovskaya St., Moscow, 119991, Russia
ignlia@gmail.com
doi: 10.5922/0321-4796-2021-53-6

Reeb vector field of almost contact metric structure as affine motion

Submitted on May 28, 2022

Smooth manifold with almost contact metric structure (i. e., almost contact metric manifold) was considered in this paper. We used a modern version of Cartan’s method of external forms to conduct our study. We assume that its Reeb vector field is affine motion. We got formulas for components of second covariant differential of contact form for an arbitrary almost contact metric manifold. Criterion for affine motion of Reeb vector field has been obtained for arbitrary almost contact metric manifold in this paper. It is proved that if Reeb vector field of almost contact structure is affine motion then sixth structural tensor of almost contact metric structure is vanishing. It is proved that if Reeb vector field is affine motion and torse-forming vector field then Reeb vector field is Killing vector field. It is proved that if Reeb vector field of almost contact metric structure is torse-forming vector field and it is not Killing vector field then it is not affine motion.

Keywords: almost contact metric structure, Reeb vector field, affine motion, torse-forming vector field

References

1. *Kirichenko, V.F.:* Differential-geometric structures on manifolds. Odessa (2013).

2. *Aminova, A.V.*: Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds. Moscow (2003).

3. *Ignatochkina, L.A., Nikiforova, A.V.:* Invariance of almost contact metric structure under Reeb vector fields. Classic and modern geometry. Moscow, 75—76 (2021).

4. *Terpstra, M.A.:* About geometry of characteristic vector of almost contact metric structure. PhD thesis. Moscow (2011).