О.С.Р е д о з у б о в а.Пары θ нормальных конгруэнций. 86

Г.Л.С в е ш н и к о в а.Об одном классе конгруэнции коник в P_3. 94

Е.В.С к р ы д л о в а.О вырожденных конгруэнциях второго рода,порожденных парой коник. 99

Е.П.С о п и н а.Конгруэнции центральных невырожденных гиперквадрик в n-мерном аффинном пространстве. . I05

А.В.С т о л я р о в.О внутренней геометрии поверхности Картана. III

В.А.Т и х о н о в.Ступенчато-чебышевские сети на многомерных поверхностях аффинного пространства. . . II9

Т.П.Ф у н т и к о в а.Безынтегральное представление двух классов вырожденных конгруэнций $(CL)_{1,2}$. I30

Е.А.Х л я п о в а.Инвариантные образы,ассоциированные с конгруэнцией центральных квадратичных элементов в A_n.. . . . . I35

Ю.И.Ш е в ч е н к о.Связности в главных расслоениях, ассоциированных с тангенциально вырожденными поверхностями в проективном пространстве. I39

С е м и н а р. I47

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Б.А.А н д р е е в

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОМ СООТВЕТСТВИИ МЕЖДУ ТОЧЕЧНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ И ПРОСТРАНСТВОМ ПАРЫ (p, q)

Продолжается изучение локального соответствия f между точечным проективным пространством P_N и пространством $R(F)$ пар фигур $F=(p,q)$,где p -точка,а q -неинцидентная ей гиперквадрика [I],[2].

Получены обобщения понятия $K(p_\alpha)$-главных прямых,с их помощью введены понятия f_p- и f_q -главных точек,обнаружена их связь с асимптотическими направлениями распределений подпространств,порожденных соответствием f .

Символ (i,j) [к] означает формулу (i,j) работы [K].

§I. Распределения $\{\overset{\circ}{L}_p\}$ и $\{\overset{\circ}{L}_q\}$.

Рассмотрим индуцируемые отображением $f: U \to R(F), U \subset P_N$ отображения $f_p: U \to P_n$ и $f_q: U \to R(q)$[2,с.II-I2].Введем,в отличие от (2.5)[2],(2.6)[2],следующие обозначения:

$$\Lambda_{oi\mathcal{J}} = -a_{il}\Lambda^{l}_{\mathcal{J}},\ \Lambda_{oi\mathcal{J}\mathcal{K}} = -\Lambda_{i\mathcal{J}\mathcal{K}} - a_{il}\Lambda^{l}_{\mathcal{J}\mathcal{K}} - \Lambda_{il(\mathcal{J}}\Lambda^{l}_{\mathcal{K})} \quad (1.1)$$

$$(i,j,\ldots = 1,\ldots,n;\ i',j',\ldots = 0,1,\ldots,n;\ \mathcal{J},\mathcal{K},\ldots = 1,\ldots,N).$$

Тогда уравнения отображений f_p и f_q примут,соответственно вид:

$$\tilde{x}^i = \Lambda^i_{\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{J}} + \frac{1}{2}\Lambda^i_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\tilde{X}^{\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{K}} + \langle 3 \rangle, \quad (1.2)$$

$$a_{i'j} = a^{\circ}_{i'j} + \Lambda_{i'j\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{J}} + \frac{1}{2}\Lambda_{i'j\mathcal{J}\mathcal{K}}\tilde{X}^{\mathcal{J}}\tilde{X}^{\mathcal{K}} + \langle 3 \rangle, \quad (1.3)$$

где $a^{\circ}_{oj} \equiv 0$,а символ $\langle 3 \rangle$ означает совокупность членов третьего порядка малости относительно $\tilde{X}^{\mathcal{J}}$.

Отображения f_p и f_q порождают два расслоения области U на подмногообразия, являющиеся соответственно прообразами элементов p и q при этих отображениях. Из уравнений (1.2),(1.3) следует, что инвариантные подпространства $\overset{\circ}{L}_p$ и $\overset{\circ}{L}_q$, уравнения которых имеют вид:

$$\Lambda^i_\gamma X^\gamma = 0, \tag{1.4}$$

$$\Lambda_{i'j\gamma} X^\gamma = 0, \tag{1.5}$$

являются касательными подпространствами в точке $P^\circ \in U$ соответственно к подмногообразиям: $f_p^{-1}(p^\circ)$ и $f_q^{-1}(q^\circ)$, где $(p^\circ, q^\circ) = f(P^\circ)$. Отсюда следует, что распределения $\{\overset{\circ}{L}_p\}$ и $\{\overset{\circ}{L}_q\}$ подпространств $\overset{\circ}{L}_p$ и $\overset{\circ}{L}_q$ являются голономными распределениями [3, с.64]. Очевидно также, что пересечение $\overset{\circ}{L}_p \cap \overset{\circ}{L}_q$ состоит из рассматриваемой точки P°, а коразмерности d_p и d_q подпространств $\overset{\circ}{L}_p$ и $\overset{\circ}{L}_q$ равны соответственно рангам [4, с.181] фигур p и q, и, таким образом, распределения $\{\overset{\circ}{L}_p\}$ и $\{\overset{\circ}{L}_q\}$ являются друг для друга распределениями нормалей первого рода [3, с.57].

§2. $K_p(P_\gamma)$-главные и $K_q(Q_\gamma)$-главные точки

Уравнения касательных к f_p и f_q дробнолинейных отображений $K_p(P_\gamma)$ и $K_q(Q_\gamma)$ имеют соответственно вид:

$$\tilde{x}^i = \frac{\Lambda^i_\gamma \tilde{X}^\gamma}{1 - P_\gamma \tilde{X}^\gamma}, \tag{2.1}$$

$$a_{i'j} = a^\circ_{i'j} + \frac{\Lambda_{i'j\gamma}\tilde{X}^\gamma}{1 - Q_\gamma \tilde{X}^\gamma}. \tag{2.2}$$

Системы величин $\{P_\gamma\}$ и $\{Q_\gamma\}$ являются квазитензорами:

$$\overset{\circ}{\nabla} P_\gamma = \overset{\circ}{\nabla} Q_\gamma = -\Pi^\circ_\gamma. \tag{2.3}$$

Введем понятие $K_q(Q_\gamma)$-главных прямых, обобщающее для отображения f_q понятие $K(p_\alpha)$-главных прямых точечных взаимнооднозначных соответствий [5, с.71]. Рассмотрим дробнолинейное отображение $\breve{K}_q : R(q) \to P_N$. Потребуем, чтобы гомография $K_q(Q_\gamma, E) = \breve{K}_q \circ K_q(Q_\gamma)\big|_E$, где $E = im\, \breve{K}_q(R(q))$, была тождественным отображением пространства E.

Определение 1. $K_q(Q_\gamma)$-главными прямыми отображения f_q называются главные прямые точечных биективных отображений вида

$$f_q(E, Q_\gamma) = \breve{K}_q \circ f_q\big|_E \tag{2.4}$$

для касательных к ним тождественных гомографий.

Можно показать, что свойство быть $K_q(Q_\gamma)$-главной прямой не зависит от выбора отображений $\breve{K}_q$ и подпространств $\breve{K}_q(R(q))$, в которых лежит эта прямая. Очевидно также, что приведенное определение имеет смысл только для прямых, не лежащих в подпространстве $\overset{\circ}{L}_q$, так как выполняется: $K_q(Q_\gamma)(\overset{\circ}{L}_q) = q^\circ$.

Определение 2. Точка A, не принадлежащая подпространству $\overset{\circ}{L}_q$, называется f_q-главной, если существует касательное к f_q дробнолинейное отображение $K_q(Q_\gamma)$, такое, что, когда прямая $P^\circ A$ является $K_q(Q_\gamma)$-главной, то гиперквадрика $K_q(Q_\gamma)(A)$ инцидентна точке p°.

Теорема 1. На каждой $K_q(Q_\gamma)$-главной прямой существует единственная f_q-главная точка.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится так же, как доказательство теоремы 1 работы [1]. Если прямая $P^\circ A$ является $K_q(Q_\gamma)$-главной, то необходимым и достаточным условием того, чтобы точка A была f_q-главной, является ее принадлежность гиперплоскости

$$Q_\gamma X^\gamma = X^\circ. \tag{2.5}$$

Заметим, что аналогичные построения можно провести, заменив f_q, $K_q(Q_\gamma)$, $R(q)$ и $\overset{\circ}{L}_q$ соответственно на f_p, $K_p(P_\gamma)$, P_n и $\overset{\circ}{L}_p$ и определив таким образом понятия $K_p(P_\gamma)$-главных прямых и f_p-главных точек. Место гиперплоскости (2.5) в этих построениях займет гиперплоскость

$$P_\gamma X^\gamma = X^\circ. \tag{2.6}$$

§3. p-индикатриса $\mathcal{J}_p$ и q-индикатриса $\mathcal{J}_q$

Рассмотрим инвариантные многообразия

$$\Lambda^i_{\gamma\varkappa} X^\gamma X^\varkappa - 2\Lambda^i_\gamma X^\gamma X^\circ = 0, \tag{3.1}$$

$$\Lambda_{i'_j \gamma \varkappa} X^{\gamma} X^{\varkappa} - 2\Lambda_{i'_j \gamma} X^{\gamma} X^{\circ} = 0, \qquad (3.2)$$

относящиеся ко второй дифференциальной окрестности отображения f. Будем называть их, соответственно p-индикатрисой и q-индикатрисой. В общем случае p-индикатриса $\mathcal{J}_p$ (q-индикатриса $\mathcal{J}_q$) является алгебраическим многообразием размерности $N-d_p$ $(N-d_q)$ и порядка 2^{d_p} (2^{d_q}), содержит точку P° и имеет в этой точке касательным подпространством подпространство $\overset{\circ}{L}_p$ $(\overset{\circ}{L}_q)$.

Т е о р е м а 2. Множество $\mathcal{J}_p \setminus (\mathcal{J}_p \cap \overset{\circ}{L}_p)$ является множеством f_p–главных точек.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (I.4) [I], (3.I) и (2.6) следует, что f_p –главные точки лежат на p-индикатрисе $\mathcal{J}_p$. Пусть координаты X^{γ}, X° точки A удовлетворяют системе (3.I). Возьмем произвольную гиперплоскость (2.6), содержащую точку A. Получаем

$$\Lambda^i_{\gamma\varkappa} X^{\gamma} X^{\varkappa} = 2 P_{\gamma} \Lambda^i_{\varkappa} X^{\gamma} X^{\varkappa}. \qquad (3.3)$$

Если точка A не принадлежит подпространству $\overset{\circ}{L}_p$, то на основании соотношений (I.3) [I] заключаем, что прямая $P^{\circ}A$ является $K_p(P_{\gamma})$–главной, и тогда из (2.6) следует, что точка A – f_p–главная.

Т е о р е м а 3. Многообразие $\mathcal{J}_p \cap \overset{\circ}{L}_p$ является множеством точек, лежащих на асимптотических направлениях распределения $\{\overset{\circ}{L}_p\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Расположим вершины R_{α} $(\alpha, \beta, \ldots = 1, 2, \ldots, n)$ в текущем элементе $\overset{\circ}{L}_p$ распределения $\{\overset{\circ}{L}_p\}$, а вершины $R_{\hat{\alpha}}$ $(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \ldots = n+1, \ldots, N)$ –на его нормали первого рода $\overset{\circ}{L}_q$. Система дифференциальных уравнений распределения $\{\overset{\circ}{L}_p\}$ в таком репере имеет вид [3, с.54]:

$$\Omega^{\hat{\alpha}}_{\alpha} = \Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\gamma} \Omega^{\gamma}_{\circ}, \qquad (3.4)$$

причем для системы величин $\Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\gamma}$ выполняется равенство:

$$\Lambda^{\hat{\alpha}}_{\alpha\gamma} \Lambda^i_{\hat{\alpha}} = - \Lambda^i_{\alpha\gamma}. \qquad (3.5)$$

Из (3.I) получаем систему дифференциальных уравнений многообразия $\mathcal{J}_p \cap \overset{\circ}{L}_p$:

$$\Lambda^i_{\alpha\beta} X^{\alpha} X^{\beta} = 0, \quad X^{\hat{\alpha}} = 0, \qquad (3.6)$$

которая, согласно (3.5), равносильна системе уравнений конуса асимптотических направлений распределения $\{\overset{\circ}{L}_p\}$ [3, с.81].

Из теорем 2 и 3 вытекает следующая связь между двумя различными понятиями. Свойство быть f_p–главной точкой имеет смысл лишь для точек, не лежащих в подпространстве $\overset{\circ}{L}_p$. Рассмотрим, однако, последовательность таких точек, сходящихся к точке подпространства $\overset{\circ}{L}_p$.

Т е о р е м а 4. Если последовательность f_p–главных точек сходится к точке подпространства $\overset{\circ}{L}_p$, то эта точка лежит на асимптотической прямой распределения $\{\overset{\circ}{L}_p\}$.

Утверждения, аналогичные теоремам 2,3,4, справедливы также для q-индикатрис и распределения $\{\overset{\circ}{L}_q\}$.

Список литературы

I. А н д р е е в Б.А. О дифференциальной геометрии соответствий между точечными пространствами и некоторыми пространствами пар фигур. – . Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3, Калининград, 1973, с.6-I9.

2. А н д р е е в Б.А. Характеристические направления соответствия между точечным пространством и пространством пары (p,q).–Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.6, Калининград, 1975, 5-I8.

3. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейчатых элементов в пространстве проективной связности I.–"Труды геом.семинара", т.3, 1971, ВИНИТИ, 49-94.

4. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве. –"Труды геом.семинара", т.2, 1969, ВИНИТИ, с.179-206.

5. Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами.–Итоги науки, ВИНИТИ. Геометрия, 1969, 65-107.