

УДК 530.145

А. А. Иванов, А. И. Иванов

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ КУБИТА
С ФЛУКТУИРУЮЩИМ ОКРУЖЕНИЕМ

Показано, что уравнения Гурвица и Мозурского для системы, состоящей из кубита, взаимодействующего с флуктуирующим окружением, при выполнении определенных условий сводятся к уравнениям эволюции кубита. В свою очередь данные уравнения допускают обобщение к виду, который предполагает существование перепутанных состояний объединенной системы. Из них два состояния симметричны и два – антисимметричны, причем одно симметричное состояние стационарно.

It is shown that the equations of Gurvitz and Mozyrsky for a system consisting of a qubit interacting with a fluctuating environment in certain conditions are reduced to evolution equations of the qubit. Such evolution equations for the qubit can be generalized to the form, which implies the existence of entangled states of the combined system. Among these entangled states two are symmetric, and two – antisymmetric. One symmetric state is stationary.

Ключевые слова: кубит, квантовые измерения, одноэлектронный транзистор, перепутанные состояния.

Key words: qubit, quantum measurement, single electron transistor, entangled states

Исследование влияния окружения на квантовую систему – одна из важнейших задач квантовой теории информации. Это влияние связано с понятием декогеренции (дефазировки), которое обозначает переход квантовой системы из чистого состояния в статистическую смесь состояний. Несмотря на значительный объем теоретических работ, посвященных декогеренции, ее механизм до сих пор не исследован в достаточной степени. Процесс декогеренции часто идет одновременно с релаксацией. Оба этих процесса являются необратимыми и оказывают различное воздействие на квантовую систему. В последнее время значительное внимание уделяется исследованию влияния флуктуаций окружения на процесс декогеренции. Для того чтобы установить взаимосвязь между спектральными характеристиками флуктуаций окружения и декогеренцией, необходима модель, которая последовательно описывает эффекты декогеренции и релаксации с точки зрения квантовой механики. В качестве такой модели ранее была предложена спин-бозонная модель (см., например, [1; 2]), которая представляет окружение в виде системы гармонических осцилляторов, находящихся в равновесии, в то время как флуктуации подчиняются гауссовой статистике [3]. Несмотря на свою простоту, спин-бозонная модель не позволяет получить точного решения [2]. Кроме того, мезоскопические структуры могут быть связаны только с локальными изолированными источниками флуктуаций, такими, как спины, локальные токи, флуктуации

заряда и т.д. Это требует модели окружения, отличной от спин-бозонной (см., например, [4; 5]). В общем случае окружение может не находиться в равновесии, как, например, флуктуирующий ток, взаимодействующий с кубитом [6]. Это справедливо, в частности, при измерениях над квантовыми системами [7].

В работе [8] рассмотрен электростатический кубит, взаимодействующий с флуктуирующим окружением. В качестве квантово-механической модели окружения выбран одноэлектронный транзистор (single electron transistor – SET), находящийся во взаимодействии с кубитом. Такая модель отражает основные свойства флуктуирующего неравновесного окружения. Дискретность заряда электрона, туннелирующего через SET, создает рядом с ним флуктуации в электростатическом поле. Если поместить кубит в непосредственной близости от SET, то это поле будет влиять на поведение кубита, создавая флуктуации туннельного тока.

Одноэлектронный транзистор в данной модели при определенном выборе параметров может играть роль как измерительного устройства, так и чистого окружения. В работе [8] SET моделирует флуктуации окружения, взаимодействующего с кубитом (рис. 1).

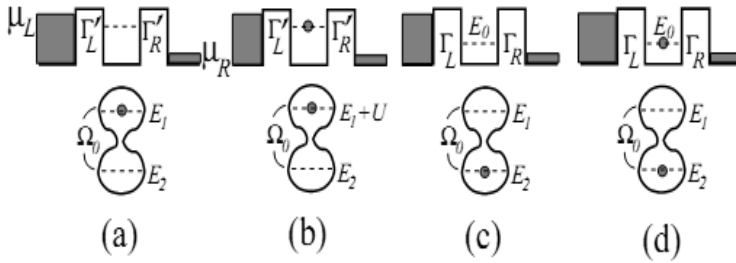


Рис. 1. Различные состояния объединенной системы, состоящей из кубита и одноэлектронного транзистора, моделирующего флуктуирующее окружение

В этой работе для объединенной системы (кубит + флуктуирующее окружение) получены уравнения:

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}_{aa} &= -\Gamma'_L \sigma_{aa} + \Gamma'_R \sigma_{bb} - i\Omega_0 (\sigma_{ac} - \sigma_{ca}), \\
 \dot{\sigma}_{bb} &= -\Gamma'_R \sigma_{bb} + \Gamma'_L \sigma_{aa} - i\Omega_0 (\sigma_{bd} - \sigma_{db}), \\
 \dot{\sigma}_{cc} &= -\Gamma_L \sigma_{cc} + \Gamma_R \sigma_{dd} - i\Omega_0 (\sigma_{ca} - \sigma_{ac}), \\
 \dot{\sigma}_{dd} &= -\Gamma_R \sigma_{dd} + \Gamma_L \sigma_{cc} - i\Omega_0 (\sigma_{db} - \sigma_{bd}), \\
 \dot{\sigma}_{ac} &= -i\varepsilon_0 \sigma_{ac} - i\Omega_0 (\sigma_{aa} - \sigma_{cc}) - \frac{\Gamma_R + \Gamma'_R}{2} \sigma_{ac} + \sqrt{\Gamma_R \Gamma'_R} \sigma_{bd}, \\
 \dot{\sigma}_{bd} &= -i(\varepsilon_0 + U) \sigma_{bd} - i\Omega_0 (\sigma_{bb} - \sigma_{dd}) - \frac{\Gamma_R + \Gamma'_R}{2} \sigma_{bd} + \sqrt{\Gamma_L \Gamma'_L} \sigma_{ac},
 \end{aligned} \tag{1}$$



где $\Gamma_{L,R}$, $\Gamma'_{L,R}$ – скорости туннелирования, E_0 – уровень энергии SET, E_1 , E_2 – уровни энергии кубита, U – величина сдвига уровня E_1 . В этой модели изменение скоростей туннелирования от величин $\Gamma_{L,R}$ до величин $\Gamma'_{L,R}$ отражает флуктуацию окружения. Заметим, что если $\Gamma'_{L,R} = \Gamma_{L,R}$, то, как следует из уравнений (1), кубит не влияет на поведение заряда внутри SET.

Редуцированная матрица плотности кубита получается из матрицы плотности усреднением по состояниям одноэлектронного транзистора (SET):

$$\begin{aligned}\rho_{11}(t) &= \sigma_{aa}(t) + \sigma_{bb}(t), \\ \rho_{12}(t) &= \sigma_{ac}(t) + \sigma_{bd}(t), \\ \rho_{22}(t) &= 1 - \rho_{11}(t).\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь $|1\rangle$ и $|2\rangle$ – векторы состояний кубита: $|1\rangle$ – электрон в верхней квантовой точке, $|2\rangle$ – в нижней квантовой точке. Если $U = 0$ и параметры флуктуируют синфазно, так что

$$\left(\sqrt{\Gamma_L} - \sqrt{\Gamma'_L}\right)^2 = \left(\sqrt{\Gamma_R} - \sqrt{\Gamma'_R}\right)^2 \equiv \Delta\Gamma,\tag{3}$$

то редукция системы уравнений (1) для кубита и окружения (одноэлектронного транзистора) в четырехмерном пространстве приводит к замкнутой системе уравнений эволюции кубита в двухмерном пространстве:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{11} &= -i\Omega_0(\rho_{12} - \rho_{21}), \\ \dot{\rho}_{12} &= -i\varepsilon_0\rho_{12} - i\Omega_0(\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{\Delta\Gamma}{2}\rho_{12}.\end{aligned}\tag{4}$$

Этот факт свидетельствует о том, что при выполнении отмеченных выше условий состояния кубита не зависят от состояний окружения, а только от параметра, характеризующего окружение. Это также означает, что в этом случае в системе «кубит – окружение» отсутствует переходный процесс. Решая систему уравнений (4), получаем

$$\rho_{11}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(C_+e^{-\alpha_+t} + C_-e^{-\alpha_-t}),$$

где $\alpha_{\pm} = \frac{1}{4}(\Delta\Gamma \pm \tilde{\Omega})$, $C_{\pm} = 1 \pm (\Delta\Gamma / \tilde{\Omega})$, $\tilde{\Omega} = \sqrt{\Delta\Gamma^2 - 64\Omega_0^2}$.

Система уравнений (4) допускает и обратную редукцию – переход в четырехмерное пространство. Такой переход в рамках метода эффективного гамильтониана был продемонстрирован в работах [9; 10]. При этом в дополнение к рассматриваемой системе (кубит) вводится вспомогательная подсистема (например, SET). Основное требование: состояния вспомогательной подсистемы описываются в пространстве той же размерности, что и у рассматриваемой системы. В нашем случае это двухмерное пространство. Итак, в дополнение к $|1\rangle$ и $|2\rangle$ – векторам состояний кубита, добавим $|1'\rangle$ и $|2'\rangle$ – векторы состояний вспомогательной подсистемы («окружения»). Следуя работе [9], найдем явное



выражение для эффективного гамильтониана H_{eff} объединенной системы (кубит + вспомогательная подсистема) в матричном виде. Для этого введем новую систему векторов четырехмерного пространства состояний объединенной системы:

$$\begin{aligned} |I\rangle &\equiv |1\rangle \otimes |1'\rangle \equiv |11'\rangle, \\ |II\rangle &\equiv |1\rangle \otimes |2'\rangle \equiv |12'\rangle, \\ |III\rangle &\equiv |2\rangle \otimes |1'\rangle \equiv |21'\rangle, \\ |IV\rangle &\equiv |2\rangle \otimes |2'\rangle \equiv |22'\rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

Для системы уравнений (4) в базисе (5) матрица H_{eff} примет вид:

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_0 & -\Omega_0 & 0 \\ \Omega_0 & \left(\varepsilon_0 - \frac{i\Delta\Gamma}{2} \right) & 0 & -\Omega_0 \\ -\Omega_0 & 0 & \left(-\varepsilon_0 - \frac{i\Delta\Gamma}{2} \right) & \Omega_0 \\ 0 & -\Omega_0 & \Omega_0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Из выражения (6) видно, что матрица H_{eff} неэрмитова и симметрична. Уравнение эволюции объединенной системы

$$i\dot{R} = H_{\text{eff}}R - RH_{\text{eff}}^+ \quad (7)$$

приводит к уравнениям для матричных элементов матрицы плотности R этой системы в базисе (5):

$$\begin{aligned} \dot{R}_{I,I} &= -i\Omega_0 (R_{II,I} - R_{I,II} + R_{I,III} - R_{III,I}), \\ \dot{R}_{II,II} &= -i\Omega_0 (R_{II,I} - R_{I,II} + R_{II,IV} - R_{IV,II}) - \Delta\Gamma R_{II,II}, \\ \dot{R}_{III,III} &= -i\Omega_0 (R_{IV,III} - R_{III,IV} + R_{III,I} - R_{I,III}) - \Delta\Gamma R_{III,III}, \\ \dot{R}_{IV,IV} &= -i\Omega_0 (R_{III,IV} - R_{IV,III} + R_{IV,II} - R_{II,IV}), \\ \dot{R}_{I,II} &= -i\Omega_0 (R_{II,II} - R_{III,II} + R_{I,IV} - R_{I,I}) + \left(i\varepsilon_0 - \frac{\Delta\Gamma}{2} \right) R_{I,II}, \\ \dot{R}_{II,IV} &= -i\Omega_0 (R_{I,IV} - R_{IV,IV} + R_{II,II} - R_{II,III}) + \left(-i\varepsilon_0 - \frac{\Delta\Gamma}{2} \right) R_{II,IV}. \end{aligned} \quad (8)$$

Матрица R — эрмитова, а ее след начинает сохраняться с момента времени, когда матричные элементы $R_{II,II}$ и $R_{III,III}$ становятся исчезающе малыми. Более того, при выполнении этого условия редукция уравнения эволюции (7) путем усреднения по состояниям вспомогательной подсистемы приводит к уравнениям эволюции (4) для кубита. Параметр, характеризующий флуктуирующее «окружение», не только определяет скорость распада состояний $|II\rangle$ и $|III\rangle$, но и приводит к затуханию всех недиагональных элементов матрицы R кроме $R_{I,IV}$ и $R_{IV,I}$. Итак, к уравнениям эволюции (4) кубита при выполнении отмеченных выше условий приводит редукция как уравнений (1), так и (7).



Найдем далее правые собственные векторы $|\varphi_k\rangle$ и соответствующие им собственные значения эффективного гамильтониана:

$$\hat{H}_{eff} |\varphi_k\rangle = \varepsilon_k |\varphi_k\rangle. \quad (9)$$

Прежде всего отметим свойства симметрии гамильтониана и векторов $|\varphi_k\rangle$. Они обладают симметрией относительно перестановки базисных векторов. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим сначала два вектора достаточно общего вида:

$$\begin{aligned} |\Theta\rangle &= C_1 |11'\rangle + C_2 |12'\rangle + C_3 |21'\rangle + C_4 |22'\rangle, \\ |\Pi\rangle &= C_1 |22'\rangle + C_2 |21'\rangle + C_3 |12'\rangle + C_4 |11'\rangle, \end{aligned}$$

где C_i — соответствующие коэффициенты.

Определим оператор $\hat{P}(12|1'2')$ перестановки базисных векторов соотношением

$$\hat{P}(12|1'2')|\Theta\rangle = |\Pi\rangle$$

или эквивалентным ему соотношением

$$\hat{P}(12|1'2')|\Theta\rangle\langle\Theta| = |\Pi\rangle\langle\Pi|.$$

Очевидно, что двукратное применение этого оператора к вектору $|\Theta\rangle$ или проектору $|\Theta\rangle\langle\Theta|$ оставляет их неизменными. Поскольку оператор H_{eff} коммутирует с оператором перестановки

$$[\hat{H}_{eff}, \hat{P}(12|1'2')] = 0,$$

то векторы $|\varphi_k\rangle$ должны обладать определенной перестановочной симметрией. Заметим, что такую симметрию имеют максимально перепутанные состояния Белла

$$\begin{aligned} |\Phi^+\rangle &= 1/\sqrt{2}(|11'\rangle + |22'\rangle), \\ |\Psi^+\rangle &= 1/\sqrt{2}(|12'\rangle + |21'\rangle), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} |\Phi^-\rangle &= 1/\sqrt{2}(|11'\rangle - |22'\rangle), \\ |\Psi^-\rangle &= 1/\sqrt{2}(|12'\rangle - |21'\rangle). \end{aligned} \quad (11)$$

В частности, состояния $|\Phi^+\rangle$ и $|\Psi^+\rangle$ — симметричны, а $|\Phi^-\rangle$ и $|\Psi^-\rangle$ — антисимметричны. Векторы (10) и (11) удобно выбрать в качестве базисных. Тогда в этом представлении матрица H_{eff} примет вид

$$\hat{H}_{eff} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\Delta\Gamma/2 & 0 & \varepsilon_0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\Omega_0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 2\Omega_0 & -i\Delta\Gamma/2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$



Из выражения (12) видим, что матрица H_{eff} блок-диагональна и легко найти выражения для ее правых собственных векторов и соответствующих им собственных значений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0, \\ |\varphi_1\rangle &= 1/\sqrt{2}(|11'\rangle + |22'\rangle), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= -i\Delta\Gamma/2, \\ |\varphi_2\rangle &= 1/\sqrt{2}(|12'\rangle + |21'\rangle), \\ \varepsilon_3 &= -i\Delta\Gamma/4 + \sqrt{4\Omega_0^2 - \Delta\Gamma^2}/16, \\ \varepsilon_4 &= -i\Delta\Gamma/4 - \sqrt{4\Omega_0^2 - \Delta\Gamma^2}/16, \end{aligned} \quad (14)$$

$$|\varphi_k\rangle = \sqrt{2(1 + |\alpha_k|^2)}(|11'\rangle + \alpha_k(|12'\rangle - |21'\rangle) - |22'\rangle),$$

$$\alpha_k = \frac{\varepsilon_k}{2\Omega_0} \quad k = 3, 4.$$

Найденные векторы обладают симметрией относительно перестановки базисных векторов. Действительно, из выражений (13) видно, что векторы $|\varphi_1\rangle$ и $|\varphi_2\rangle$ симметричны: $\hat{P}(12|1'2')|\varphi_i\rangle = |\varphi_i\rangle, i = 1, 2$.

Из выражений (14) следует, что векторы $|\varphi_3\rangle, |\varphi_4\rangle$ антисимметричны:

$$\hat{P}(12|1'2')|\varphi_k\rangle = -|\varphi_k\rangle, \quad k = 3, 4.$$

Здесь $|\varphi_k\rangle$ – векторы квазистационарных состояний объединенной системы, изменяющиеся во времени:

$$|\varphi_k(t)\rangle = |\varphi_k\rangle e^{-i\varepsilon_k t}.$$

Следовательно, антисимметричные состояния и симметричное состояние $|\varphi_2\rangle$ затухают, а симметричное состояние $|\varphi_1\rangle$ – стационарно. Векторы $|\varphi_k\rangle$ определяют перепутанные состояния, причем $|\varphi_3\rangle$ и $|\varphi_4\rangle$ допускают существование суперпозиционных состояний «окружения» типа состояний кота Шрёдингера. Действительно, например, вектор $|\varphi_3\rangle$ можно представить в следующем виде:

$$|\varphi_3\rangle = C(|1\rangle \otimes |s\rangle + |2\rangle \otimes |s'\rangle),$$

где $|s\rangle$ и $|s'\rangle$ – суперпозиционные состояния флуктуирующего «окружения»:

$$\begin{aligned} |s\rangle &\equiv |1'\rangle - \alpha_3 |2'\rangle, \\ |s'\rangle &\equiv \alpha_3 |1'\rangle - |2'\rangle. \end{aligned}$$

Заметим, что вектор $|\varphi_3\rangle$ можно представить также и через суперпозиционные состояния кубита.



Итак, в работе показано, что уравнения (1) при выполнении условий (3) сводятся к уравнениям эволюции кубита (4), что справедливо для любого момента времени. В свою очередь, уравнения (4) допускают обобщение к виду (7), который предполагает существование перепутанных состояний объединенной системы. Среди них два состояния симметричны и два — антисимметричны, причем одно симметричное состояние стационарно. Кроме того, антисимметричные состояния допускают представление, использующее суперпозиционные состояния кубита или вспомогательной подсистемы (флуктуирующего окружения).

Список литературы

13

1. Leggett A.J., Chakravarty S., Dorsey A.T. et al. Dynamics of the dissipative two-level system // *Rev. Mod. Phys.* 1987. Vol. 59, № 1.
2. Weiss U. *Quantum Dissipative Systems* // World Scientific. Singapore, 2000.
3. Shnirman A., Makhlin Y., Schoon G. Noise and Decoherence in quantum two-level systems // *Phys. Scr.* 2002. Vol. 102, № 147.
4. Gassmann H., Marquardt F., Bruder C. Non-Markovian effects of a simple nonlinear bath // *Phys. Rev.* 2002. Vol. E 66. P. 041111.
5. Paladino E., Faoro L., Falci G., Fazio R. Suppression of noise in one-qubit systems // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 88. P. 228304.
6. Gurvitz S.A. Measurements with a noninvasive detector and dephasing mechanism // *Phys. Rev.* 1997. Vol. B 56. P. 15215.
7. Kock A., Wendin G., Johansson G. Full frequency voltage noise spectral density of a single electron transistor // *Phys. Rev.* 2003. Vol. B 67. P. 035301.
8. Gurvitz S.A., Mozyrsky D. Quantum mechanical approach to decoherence and relaxation generated by fluctuating environment // *Phys. Rev.* 2008. Vol. B 77. P. 075325.
9. Иванов А.И., Иванов А.А. Применение метода эффективного гамильтониана в динамике открытых квантовых систем // *Вестник Российского государственного университета им. И. Канта*. Вып. 4. Калининград, 2009. С. 25.
10. Иванов А.И., Иванов А.А. Оценка ошибок детектирования состояний кубита // *Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта*. Вып. 5. Калининград, 2011. С. 17.

Об авторах

Алексей Иванович Иванов — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: AIvanov@kantiana.ru

Александр Алексеевич Иванов — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: AIvanov@kantiana.ru

About authors

A. Ivanov — Dr, professor, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: AIvanov@kantiana.ru

A. Ivanov — PhD student, I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: AIvanov@kantiana.ru