С.Н. Юрьева

*(Российский государственный университет им. И. Канта,
г. Калининград)*

НОРМАЛИЗАЦИЯ ФОССА — ГРИНА ГИПЕРПОЛОСЫ $H_m(\Lambda)$

Построена нормализация Фосса — Грина специального класса гиперполос $H_m(\Lambda)$ аффинного пространства A_n.

Схема использования индексов такова:

$$i, j, k = \overline{1,m}; \quad \alpha, \beta = \overline{m+1, n-1}, \quad p, q, r = \overline{1,r},$$
$$a, b, c = \overline{r+1, m}, \quad I, J, K, L = \overline{1, n}.$$

1. В n-мерном аффинном пространстве A_n рассмотрим m-мерную гиперполосу $H_m(\Lambda)$ [4], т.е. m-параметрическое семейство таких гиперплоскостных элементов (A, τ), при которых точка A описывает базисную поверхность V_m гиперполосы, а каждая гиперплоскость $\tau(A)$ касается поверхности V_m в соответствующей точке $A \in V_m$. Гиперплоскости $\tau(A)$ называются главными касательными гиперплоскостями гиперполосы $H_m(\Lambda) \subset A_n$. Рассматриваемые гиперполосы $H_m(\Lambda)$ оснащены полем r-мерных касательных плоскостей Λ. Поле Λ-плоскостей порождает сопряженное ему поле касательных (m-r)-мерных плоскостей L относительно асимптотического пучка тензоров базисной поверхности V_m гиперполосы $H_m(\Lambda)$ [4].

Отнесем n-мерное аффинное пространство A_n к подвижному реперу $R = \{M, \vec{e}_I\}$, дифференциальные уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид $d\vec{M} = \omega^K \vec{e}_K$, $d\vec{e}_J = \omega_J^K \vec{e}_K$. Совместим вершину M репера R с текущей точкой A базисной поверхности V_m. Векторы $\vec{e}_p$ поместим в касательную плоскость $\Lambda(A)$, а векторы $\vec{e}_a$ — в (m-r)-мерную плоскость L(A). Векторы $\vec{e}_\beta$ поместим в характеристику $\chi_{n-m-1}(A)$, а вектор $\vec{e}_n$ пусть занимает произвольное положение, образуя с векторами $\vec{e}_p, \vec{e}_a, \vec{e}_\beta$ репер $\{A, \vec{e}_I\}$ пространства A_n. Канонизированный таким образом репер назовем репером 1-го порядка R^1. В выбранном репере гиперполоса $H_m(\Lambda)$ задается следующими уравнениями [4]:

$$\omega^n = 0, \quad \omega^a = 0, \quad \omega^n_a = 0, \; \omega^n_p = a^n_{pq}\omega^q, \quad \omega^n_a = a^n_{ab}\omega^b,$$

$$\omega^\alpha_p = a^\alpha_{pq}\omega^q, \quad \omega^\alpha_a = a^\alpha_{ab}\omega^b, \; \omega^a_p = \lambda^a_{pi}\omega^i, \quad \omega^p_a = \lambda^p_{ai}\omega^i,$$

$$\omega^a_\alpha = \lambda^a_{\alpha i}\omega^i, \quad \omega^p_\alpha = \lambda^p_{\alpha i}\omega^i.$$

2. Определение. Точка M, принадлежащая плоскости L(A) (элемент L-подрасслоения), называется фокальной точкой плоскости L(A), соответствующей некоторому направлению *l* из Λ(A), если она не выходит из L(A) при инфинитезимальном смещении точки A в этом направлении *l*.

Направление *l* называют фокальным направлением, соответствующим фокальной точке M. Произвольную точку плоскости L(A) можно задать вектором $\vec{M} = \vec{A} + x^a\vec{e}_a$.

Если точка M является фокальной, то должно выполняться условие $dM \in L(A)$ и $\omega^a = 0$ (так как направление смещения принадлежит Λ(A)):

$$d\vec{M}\Big|_{\omega^a=0} = (\omega^p + x^a\lambda^p_{aq}\omega^q)\vec{e}_p + (dx^a + x^b\omega^a_b)\vec{e}_a.$$

Отсюда получаем

$$\omega^p + x^a\lambda^p_{aq}\omega^q = 0, \quad x^p = x^\alpha = x^n = 0. \tag{1}$$

Итак, координаты фокальной точки M должны удовлетворять уравнениям, выражающим существование нетривиального решения системы (1). Направления, определяемые этими решениями, называются фокальными направлениями. Множество всех фокальных точек называется фокальной поверхностью. Уравнение фокальной поверхности элемента L(A) L-подрасслоения в плоскости L(A) имеет вид

$$\det\left\|\delta^p_q + x^a\lambda^p_{aq}\right\| = 0, \quad x^p = x^\alpha = x^n = 0. \qquad (2)$$

Таким образом, все фокальные точки плоскости L(A) лежат на алгебраической поверхности (2) порядка r размерности (s–1). Каждой точке фокальной поверхности (2) соответствует фокальное направление из Λ(A), определяемое системой (1).

Аналогично получаем, что уравнение фокальной поверхности распределения Λ(A) (при смещении точки A вдоль кривых, принадлежащих L-подрасслоению) имеет вид

$$\det\left\|\delta^a_b + x^p\lambda^a_{pb}\right\| = 0, \quad x^a = x^\alpha = x^n = 0, \qquad (3)$$

а фокальное направление, соответствующее точке $\vec{N} = \vec{A} + x^p\vec{e}_p$ поверхности (3), определяется системой уравнений

$$\omega^a + x^p\lambda^a_{pb}\omega^b = 0, \quad x^a = x^\alpha = x^n = 0. \qquad (4)$$

3. Найдем линейную поляру точки A относительно алгебраической поверхности (2) — фокальной поверхности распределения L(A). Линейной полярой будет являться плоскость размерности s–1, определяемая уравнениями

$$1 + x^a\lambda_a = 0, \quad x^p = x^\alpha = x^n = 0, \qquad (5)$$

где

$$\lambda_a = \frac{1}{r}\lambda^p_{ap}, \quad \nabla\lambda_a = \lambda_{ai}\omega^i. \qquad (6)$$

Аналогично находится поляра точки A относительно фокальной поверхности распределения Λ(A). В результате получается (r–1)-плоскость

$$1 + x^p\lambda_p = 0, \quad x^a = x^\alpha = x^n = 0, \qquad (7)$$

где

$$\lambda_p = \frac{1}{m-r}\lambda^a_{pa}, \quad \nabla\lambda_p = \lambda_{pi}\omega^i. \qquad (8)$$

В случае обращения в нуль тензоров $\{\lambda_a\}$ и $\{\lambda_p\}$ фокальными поверхностями распределения плоскостей $\Lambda(A)$ и $L(A)$ соответственно являются несобственная (s-1)-плоскость и несобственная (r–1)-плоскость.

4. Рассмотрим (m-1)-мерную плоскость G_{m-1}, проходящую через линейные поляры точки A относительно фокальных поверхностей распределений $\Lambda(A)$ и $L(A)$. В силу уравнений (5) и (7) она определяется уравнениями

$$x^{\alpha} = x^{n} = 0, \qquad 1 + x^{p}\lambda_{p} + x^{a}\lambda_{a} = 0. \tag{9}$$

Следуя работам [2; 3], полученную плоскость G_{m-1} будем называть ребром Грина сопряженной системы $S(\Lambda(A), L(A))$. Таким образом, доказана

Теорема 1. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка инвариантным образом присоединяется поле внутренних нормалей 2-го рода гиперполосы $H_m(\Lambda)$ — поле нормалей Грина, определяемое уравнениями (6; 8). Относительно локального репера ребро Грина задается уравнениями (9).*

5. Рассмотрим инвариантную прямую $\Phi_1 = [A, \vec{\Phi}_n]$, внутренним образом присоединенную к гиперполосе $H_m(\Lambda)$ в дифференциальной окрестности 2-го порядка, определяемую вектором

$$\vec{\Phi}_n = \vec{e}_n + \Lambda_n^{\alpha}\vec{e}_{\alpha} + \lambda_n^{p}\vec{e}_p, \tag{10}$$

где

$$\Lambda_n^{\alpha} = \frac{1}{r}\left(\Lambda_n^{pq}\Lambda_{pq}^{\alpha} + \Lambda_n^{ab}\Lambda_{ab}^{\alpha}\right), \quad \nabla\Lambda_n^{\alpha} + \omega_n^{\alpha} = \Lambda_{ni}^{\alpha}\omega^{i}; \tag{11}$$

$$\lambda_n^{a} = \frac{1}{r}\Lambda_n^{pq}\lambda_{pq}^{a}, \quad \nabla\lambda_n^{a} + \omega_n^{a} = \lambda_{ni}^{a}\omega^{i}; \tag{12}$$

$$\lambda_n^{p} = \frac{1}{m-r}\Lambda_n^{ab}\lambda_{ab}^{p}, \quad \nabla\lambda_n^{p} + \omega_n^{p} = \lambda_{ni}^{p}\omega^{i}. \tag{13}$$

Следуя работе [1], прямую Φ_1 назовем прямой Фосса, ассоциированной с двухкомпонентной системой $S(\Lambda, L)$.

Плоскость $\Phi_{n-m} = [A, \Phi_1, \chi]$, натянутую на прямую Фосса Φ_1 и характеристику χ гиперполосы $H_m(\Lambda)$, назовем нормалью Фосса 1-го рода гиперполосы $H_m(\Lambda)$, порожденной сопряженной системой $S(\Lambda, L)$.

6. Найдем поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик гиперполосы $H_m(\Lambda)$:

$$\Lambda^n_{pq}x^p x^q + \Lambda^n_{ab}x^a x^b + 2A_p x^p x^n + 2A_a x^a x^n + L_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + T_0(x^n)^2 + \\ + 2l_\alpha x^\alpha x^n - 2x^n = 0, \qquad (14)$$

относительно которых в каждой точке A базисной поверхности V_m ребро Грина G_{m-1} и нормаль Фосса Φ_{n-m} 1-го рода гиперполосы $H_m(\Lambda)$ полярно сопряжены. Из условия полярной сопряженности плоскостей Φ_{n-m} и G_{m-1} относительно поля гиперквадрик (14) найдем

$$A_p = -\lambda_p - \Lambda^n_{pq}\lambda^q_n, \;\; A_a = -\lambda_a - \Lambda^n_{ab}\lambda^b_n. \qquad (15)$$

Учитывая охваты (15) в формуле (14), приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *В дифференциальной окрестности 3-го порядка внутренним образом к гиперполосе* $H_m(\Lambda)$ *присоединяется поле соприкасающихся гиперквадрик*

$$\Lambda^n_{pq}x^p x^q + \Lambda^n_{ab}x^a x^b - 2(\lambda_p + \Lambda^n_{pq}\lambda^q_n)x^p x^n - 2(\lambda_a + \Lambda^n_{ab}\lambda^b_n)x^a x^n + \\ + L_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + T_0(x^n)^2 + 2l_\alpha x^\alpha x^n - 2x^n = 0,$$

относительно которых поля нормалей Фосса и ребер Грина полярно сопряжены.

Список литературы

1. *Акивис М.А.* О нормалях Фосса поверхности, несущей сеть сопряженных линий // Мат. сб. 1962. Т. 58. №2. С. 695—706.

2. *Благонравов В.В.* Распределения на гиперповерхности аффинного пространства / Деп. в ВИНИТИ. №4552.

3. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

4. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос: Учеб. пособие // Калининград, 1983.

S. Yureva

THE FOSS — GREEN'S NORMALIZATION
OF HYPERSTRIP $H_m(\Lambda)$

The Foss — Green's normalization of special class of hyperstrips $H_m(\Lambda)$ of affine space A_n is constructed.