

поля. — В кн.: Механика и цивилизация XVII—XIX вв. М., 1979, с. 223—228.

⁵ Франкфурт У. И. К вопросу о критике учения Ньютона о пространстве и времени в XVIII в. — В кн.: Механика и физика второй половины XVIII века. М., 1978, с. 168—170.

⁷ См.: Сергеев К. А., Солонин Ю. Н., Евтюхина Г. А. Познавательная функция философии и развитие научного знания. — В кн.: Специфика и функции философского знания. Л., 1980, с. 3—15. (Уч. зап. кафедр общ. наук вузов Ленинграда. Вып. 20).

⁶ Agassi J. Faraday as Natural Philosopher. Chicago, 1971, p. 87.

И. С. КУЗНЕЦОВА

КАНТ О НАГЛЯДНОСТИ МАТЕМАТИКИ

Проводя различие математики и философии, Кант полагал, что наглядности в «математике больше, чем в философии, так как в первой объект рассматривается в чувственно воспринимаемых знаках *in concreto*» (2, 265).

Рассмотрим, что можно понимать под наглядностью математических объектов.

1. Еще Аристотель в работе «О душе» отметил существование двух типов субъективных образов. Это положение, как теперь стало ясно, является следствием принципа отражения. Отражая объект со стороны явления, получаем чувственные образы, со стороны сущности — понятия. При этом наглядность связана с первым типом отражения: «Под наглядностью необходимо понимать свойство отражения действительности в форме чувственно-конкретных образов». ¹ Таким образом, наглядность — это прежде всего характеристика чувственной ступени познания. ² Чувственное познание объекта возможно, если имеет место взаимодействие (непосредственное или опосредованное) данного объекта с органами чувств. Второй путь чувственного познания опирается на взаимосвязь *понятия* об объекте с чувственными образами других объектов. ³

2. Теперь, когда установлено, что следует понимать под наглядностью, попробуем определить, что такое наглядность математических понятий.

2.1. По мнению Канта, объект математики — понятие числа (2, 397). Можно ли считать, что числа позволяют отразить действительность в чувственно-конкретных образах, можно ли говорить о взаимодействии чисел с органами чувств? Допустим, что у нас два яблока. Их можно потрогать, понюхать, увидеть их цвет. Или две собаки. Можно их увидеть, услышать их лай. Но само число? Имеет ли оно запах, цвет, звучит ли? Можно увидеть две нотные строчки, но если их воспроизвести на музыкальном инструменте, у нас совершенно не возникает никаких ассоциаций с числом два. Вообще, слушая музыку, вряд ли вспоминаем о том, что музыкальное произведение еще

и математически организовано, что числа играют в музыке важную роль.

Таким образом, приходится признать, что числа — это нечто отличное от материальных объектов, что они невещественны, т. е. говорить об их чувственном восприятии не имеет смысла. Так же обстоит дело и с геометрическими объектами. Можно видеть прямую палку, прямую сосну, но не прямую саму по себе. Можно не сомневаться, что когда Кант рассуждал о наглядности математических объектов, он не имел в виду чувственное восприятие их в том же смысле, что и материальных вещей.

2.2. Второй путь сложнее. Здесь должна осуществляться связь логического (понятия) с нелогическим (чувственным образом). Можно представить два множества предметов, сравнить их, устанавливая взаимнооднозначное соответствие между предметами (классический пример: в зале рассаживаются зрители, если остались свободные стулья, то их больше, чем зрителей). Но имея чувственный образ этих множеств, остаемся в затруднении: где взять понятие, которое, соединившись с этим образом, дало понятие числа. Правда, иногда полагают, что представление о множествах объектов и дает понятие о числах, которые в действительности являются некоторыми классами.⁴ Но достаточно дать такое определение и выразить его аксиоматически, как получаем противоречие. В самом деле, если понимать числа как некоторые множества, то множества любых объектов будут служить в качестве чисел, если только выполняются аксиомы Пеано. Аксиомы таковы:

- 1) 0 есть число;
- 2) следующее любого числа есть число;
- 3) никакие два числа не могут иметь одно следующее;
- 4) 0 не следует ни за каким числом;
- 5) если какое-либо свойство принадлежит 0, а также следующему каждому числу, то это свойство принадлежит всем числам.

Известно, что Цермело предложил свой вариант теоретико-множественной трактовки натуральных чисел. Он определил 0 как пустой класс λ , следующий элемент S_x вводится так: для каждого x существует единичный класс λ . Таким образом, натуральные числа 0, 1, 2, ... — это соответственно λ , $\{\lambda\}$, $\{\{\lambda\}\}$, ...

Дж. фон Нейман так же, как Цермело, выбрал в качестве 0 пустой класс λ , натуральное число определил как класс всех предыдущих классов.

Вот тут и сталкиваемся с противоречием. Например, по Цермело, $x \in y \equiv y = S_x$, т. е. x — собственное подмножество y , если y — следующее число. По Нейману, $x \in y \equiv x < y$, т. е. x — собственное подмножество y , если x меньше y . Отсюда ясно, что так как понятие следующего определено по-разному, то, например,

числу 2 в варианте Цермело соответствует один член, а в варианте Неймана два.

Итак, если считать, что каждое число является некоторым множеством, то разумно предположить, что если дано какое-либо число, то можно найти соответствующее ему множество, и наоборот, т. е. в этом случае имеем наглядный образ числа — некоторое множество. Но оказывается, получаем разногласия относительно того, какое множество указывает на данное число. Причем нет никаких аргументов, которые бы обосновали преимущества варианта Цермело перед представлением фон Неймана и наоборот. Кроме того, в принципе можно предложить и другие версии числа. Например, Ван Хао рассматривает натуральные числа как множества w , $w+1$, $w-1$, $w+2$, $w-2$, ..., и в его варианте «чисел» больше, чем у Цермело и Неймана. Следовательно, имеется в принципе любое количество теоретико-множественных представлений натуральных чисел, и приходится признать, что числа не являются множествами, т. е., имея наглядный образ множества каких-то предметов, мы не имеем наглядного образа числа. Этот факт можно интерпретировать как подтверждение той мысли, что математика не обладает наглядностью, характерной для чувственной ступени познания, и считать, что Кант только провозгласил наглядность математики, но не проанализировал эту особенность данной науки, особенность, которая, по его мнению, отличает математику от философии, что он ограничился только указанием на то, что «так как знаки математики представляют собой чувственно воспринимаемые средства познания, то здесь можно с той же уверенностью, какую имеют, когда видят собственными глазами, знать также и то, что никакое понятие не упущено, что каждое сравнение делается в соответствии с легко применимыми правилами и т. д.» (2, 264).

При этом на поверхности лежит такое рассуждение: знак — материальный, чувственно воспринимаемый предмет, выступающий в процессе познания и общения в качестве представителя другого предмета⁵, и он нагляден. Но это наглядность другого рода, речь идет не о наглядности математических объектов, а об обозримости математического вывода, в котором существенную роль играет символика. Конечно, знаковая модель способна в наглядной форме отражать объективную действительность, и притом не только и не столько со стороны сущности⁶. Однако при этом отражается не математический объект, а тот, который исследуется при помощи математики. Все это верно. И такое решение вопроса Кант имел в виду. Но позиция великого мыслителя сложнее, и следует продолжить анализ его воззрений и состояния современной ему математики дальше.

3. На взгляды Канта оказала влияние, по-видимому, и точка зрения Лейбница, который считал, что объекты математики являются и чувственными и умопостигаемыми одновре-

менно⁷, т. е. объекты математики познаются при помощи органов чувств, зрения, например. Отсюда мысль Канта о возможности созерцания их, в частности, по его мнению, можно при помощи эмпирического созерцания представить себе треугольник, изображенный на бумаге (3, 233, 603). Но в то же время, по мысли Лейбница, понять математические объекты можно только разумом. Отсюда размышления Канта о том, что необходима связь понятия и наглядного образа. Тогда дело обстоит так:

3.1. Представляем некоторый треугольник, который можно изобразить на бумаге. Получаем предмет эмпирического созерцания. Он нагляден. Все, что можно сказать о данном треугольнике, относится к единичному предмету, его познавательная ценность невелика (3, 223, 603). Но математическое знание касается не единичного, а всеобщего, поэтому нужен следующий шаг — введение «схемы».

3.2. «Схема» треугольника — это правило, при помощи которого можно построить любой треугольник. Именно «схема» осуществляет связь понятия и наглядного образа. «Схема» — это объект чистого созерцания.

3.3. Тогда начерченный на бумаге треугольник может служить «для выражения понятия без ущерба для его всеобщности, так как в этом эмпирическом созерцании я всегда имею в виду только действие по конструированию понятия, для которого многие определения, например, величина сторон и углов, совершенно безразличны, и поэтому я отвлекаюсь от этих разных определений, не изменяющих понятия треугольника» (3, 600).

В самом деле, треугольник может быть задан координатами вершин, как это делается в аналитической геометрии, и тогда наглядность выражалась бы только в том, что можно увидеть написанные на бумаге пары чисел (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) . Но соединение понятия треугольника с наглядным образом единичного начерченного треугольника и дает необходимый эффект, который так выразительно охарактеризовал Кант. В этом случае как раз имеем дело с взаимодействием понятия об объекте (треугольнике вообще, как бы его ни задавали в аналитической или проективной геометрии) с чувственным образом другого объекта (единичный, произвольно изображенный треугольник).

Итак, мысль Лейбница о чувственном познании объектов математики получила у Канта дальнейшее развитие. Но, по-видимому, утверждение Канта о наглядности математики не только имело своим источником воззрения Лейбница, но и опиралось на практику математического исследования, т. е. на работы по аналитической геометрии, что и сделало возможными приведенные в 3.1.—3.3. рассуждения. Можно не сомневаться, что Кант, преподававший математику в Кенигсберг-

ском университете, знал работы Декарта по аналитической геометрии. Преподавание математического анализа (основательное знакомство Канта с трудами Ньютона — общеизвестный факт) предполагает использование идей аналитической геометрии. Кроме того, Кант часто полемизировал с Декартом, а бывало, что и предпочитал позицию Декарта точке зрения Лейбница, значит, не мог обойти вниманием и математические работы Декарта.

Относительно практики математического исследования интересна история формирования такого раздела математики, как проективная геометрия. Возникновение этой области математики связано с развитием учения о перспективе. Эстетика Возрождения своим учением о перспективе исходит из чувственного восприятия человека. По мнению А. Ф. Лосева, история возрожденческой эстетики как раз и свидетельствует о том, что перспективное смещение и, в частности, сокращение предметов, видимых на достаточно большом расстоянии, могут быть осознаны и оформлены вполне научно. Субъективно-человеческое восприятие тоже может быть математически оформлено и может приводить к специальной геометрии, выходящей за пределы евклидовых воззрений. Появилась проективная геометрия, которая, хотя и оформляет собой обыкновенную зрительную чувственность, тем не менее обладает точностью, характерной для математических наук вообще.⁸ Вот этот переход от чувственного восприятия объектов к изображению их в живописи, в архитектуре, отсюда — переход к теории живописи, архитектуры был первым шагом. А уже теория живописи, архитектура, эстетика послужили тем материалом, который анализировался, обобщался математикой, в результате чего сформировалась проективная геометрия. Все это демонстрирует ту особенность математики, которую отметил Кант, назвав ее наглядностью. Наглядны те исходные моменты в познавательной деятельности, от которых началось движение, имеющее своим результатом построение математической теории — проективной геометрии.

Таким образом, философские идеи (Лейбниц), история развития математики (например, создание проективной геометрии), сложившаяся практика математического исследования (аналитическая геометрия) привели Канта к формулировке его концепции наглядности математики. Но можно, вероятно, обнаружить основания воззрений Канта и в анализе того, как объективная реальность отражается в знании.

Изучение «проблемы наглядности» с позиций диалектического материализма позволяет сделать выводы:

1) с онтологической точки зрения, у всякого объекта должна существовать вне и независимо от сознания познающего субъекта *единичная сторона* («явление»);

2) с гносеологической точки зрения, эта единичная сторона может быть отражена только в *наглядном представлении*.⁹

Рассматривая объект со стороны явления, приходим к формированию категорий качества и количества. Категория количества представляет собой единство моментов величины и числа. Это краткая схема первого этапа исследования материального объекта, причем проведен в данном случае анализ. Можно мысленно вернуться от понятий числа и величины к самому объекту, к его проявлениям, т. е. осуществить синтез, при отражении явления и возникают наглядные представления. По-видимому, именно в том, что число — это момент категории количества, а данная категория отражает объект со стороны явления, можно усмотреть гносеологические основания утверждений Канта о наглядности математики.

Отсюда становится ясной и та особенность развития математического знания, которую можно назвать уменьшением степени его наглядности; ведь современная математика не может считаться наглядной наукой, если, конечно, оставить в стороне обозримость математических формул и тот факт, что математические понятия фиксируются при помощи символов. Математика все более глубоко проникает в исследование сущности объектов материального мира, все дальше отходит от описания явлений, сущность же отражается в понятиях, а не в наглядных образах.

Таким образом, обращение к анализу взглядов Канта на проблему наглядности математики интересно не только с точки зрения изучения истории математики, истории философии, но позволяет понять некоторые особенности развития математического знания.

¹ Штофф В. А. О роли моделей в Кантовой механике. — Вопросы философии, 1968, № 12, с. 73.

² Штофф В. А. Моделирование и философия. М. — Л., 1966, с. 277.

³ Бранский В. П. Философское значение «проблемы наглядности» в современной физике. Л., 1962, с. 119.

⁴ Ван Хао. Процесс и существование. — В кн.: Математическая логика и ее применение. М., 1965, с. 328.

⁵ Штофф В. А. Проблемы методологии научного познания. М., 1978, с. 42.

⁶ Там же, с. 287.

⁷ Лейбниц Г. Избранные философские сочинения. М., 1908, с. 173.

⁸ Лосев А. Ф. Эстетика Возрождения. М., 1978, с. 56—57.

⁹ Бранский В. П. Философское значение «проблемы наглядности» в современной физике, с. 121—122.