Φ^{p+1} и Φ^{p+2}.

Это значит, что на поверхности $\vartheta_p \subset S_{p+1}(O,r) \subset E_{p+2}$ всегда существует такое семейство реперов $\{x, \vec{e}_i\}$, направления векторов $\vec{e}_i$ которого попарно сопряжены. Таким образом, на такой поверхности всегда существует сопряженная сеть, которая по замечанию 1 будет ортогональной.

Из доказанной теоремы и замечаний вытекает

С л е д с т в и е. Если поверхность ϑ_p, принадлежащая гиперсфере $S_{n-1}(O,r)$ евклидова пространства E_n несет сопряженную сеть, то в подвижном репере, построенном на касательных к линиям этой сети, скалярная кривизна R поверхности ϑ_p удовлетворяет неравенству:

$$\frac{p^2}{r^2} - \sum_i \vec{b}^2_{ii} \leqslant R \leqslant (p\vec{M})^2 - \frac{p}{r^2}.$$

Список литературы

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве.-Лит.матем.сб., 1966, №4, с.475-492.

2. Б а з ы л е в В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи p-поверхности евклидова пространства.-Сибирск.матем.журнал, 1966, №3, с.499-511.

3. Г е й д е л ь м а н Р.М. Об одном свойстве квадратичных сопряженных сетей.-Изв.вузов. Матем., 1968, №11, с.48-50.

4. К у р о ш А.Г. Курс высшей алгебры. М., 1971.

5. С и л а е в Е.В. О p-сопряженных системах на гиперсфере в евклидовом пространстве E_n.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.12. Калининград, 1981, с.84-87.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

Е.Н. С о с о в

ЗАМЕЧАНИЕ О РЕЛЯТИВНОЙ ЛИНЕЙЧАТОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этой статье изучается геометрия множества ориентированных прямых аффинного пространства $\mathcal{D}_3$ методом, предложенным в статье [1]. Кратко напомним сущность этого метода. В аффинном пространстве $\mathcal{D}_{n+1}$ выбирается индикатриса $\mathcal{M}_n$: $\vec{a} = \vec{a}(x^1, \ldots, x^n)$. В качестве оснащающего берется радиус-вектор $\vec{a}$ точки $\mathcal{M}_n$, при этом возникают следующие деривационные уравнения:

$$\partial_i a_j = \Gamma^k_{ij} \vec{a}_k + b_{ij} \vec{a}, \quad (i,j,k = \overline{1,n}),$$

где связность Γ^k_{ij} эквипроективна. Элементы касательного расслоения индикатрисы $T(\mathcal{M}_n)$ отождествляются с ориентированными прямыми $\mathcal{D}_{n+1}$ следующим образом: точке $T(\mathcal{M}_n)$ с локальными индуцированными координатами (x^i, x^{n+i}) ставится в соответствие ориентированная прямая с направляющим вектором $\vec{a}$, проходящая через точку: $\vec{r}_0 = \vec{a} + x^{n+s} \vec{a}_s$. В $T(\mathcal{M}_n)$ существует аффинная связность $\overset{*}{\tau}{}^\gamma_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta,\gamma = \overline{1,2n})$, инвариантная относительно преобразования $T(\mathcal{M}_n)$, индуцированных параллельными переносами в $\mathcal{D}_{n+1}$:

$$\overset{*}{\tau}{}^\gamma_{\alpha\beta} = {}^c\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - T^\gamma_{\alpha\beta},$$

где ${}^c\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ - полный лифт связности Γ^k_{ij},

$$T^\gamma_{\alpha\beta} = B_{\alpha\sigma} \omega^\sigma f^\gamma_\beta + B_{\beta\sigma} \omega^\sigma f^\gamma_\alpha - B_{\alpha\sigma} f^\sigma_\beta \omega^\gamma -$$

тензор деформации. $B_{\beta\gamma}$ - полный лифт тензора b_{ij}, ω^α - векторное поле слоевой гомотетии, которые в локальных координатах имеют вид:

$$\omega^i = 0,\ \omega^{n+i} = x^{n+i},\ [f^\alpha_\beta] = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \delta^i_j \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],\ [B_{\alpha\beta}] = \left[\begin{array}{c|c} x^{n+s}\partial_s b_{ij} & b_{ij} \\ \hline b_{ij} & 0 \end{array}\right].$$

Получены следующие результаты.

Л е м м а 1. $\overset{*}{\nabla}_\alpha \overset{*}{R}{}^\delta_{\beta\gamma\sigma} = 0$ тогда и только тогда, когда $\nabla_k b_{ij} = 0$ (критерий симметричности $T(\mathcal{M}_n)$).

Пусть ξ^a $(a = \overline{1, n+1})$ -аффинные координаты в $\mathcal{D}_{n+1}$.

Л е м м а 2. Инфинитезимальным операторам проективной группы в $\mathcal{D}_{n+1}$ соответствуют в $T(\mathcal{M}_n)$ следующие операторы (обозначаем соответствие стрелой).

$$(*)\ X = (A^a + A^a_b \xi^b + B_b \xi^b \xi^a)\frac{\partial}{\partial \xi^a} \to u = (q^s + \mu x^{n+s})\frac{\partial}{\partial x^s} +$$

$$+ (x^{n+k}\partial_k q^s + p x^{n+s} + v^s + x^{n+k}[x^{n+s}\partial_k \mu - \Gamma^s_{kp} x^{n+p}\mu])\frac{\partial}{\partial x^{n+s}},$$

где $A^a, A^b_a, B_b = const$,

$$A^a = v a^a + v^s \partial_s a,\ A^a_b a^b = p a^a + q^s \partial_s a^a,\ B_b = \mu \alpha_b + \mu_i \alpha^i_b$$

разложения векторов и ковекторов по взаимным локальным базисам $\{\vec{a}, \vec{a}_s\}$ и $\{\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}^s\}$.

Особенно интересен случай $n = 2$, когда в $T(\mathcal{M}_n)$ можно задать линейный элемент:

$$ds^2 = 2\varepsilon_{ij}\, dx^i \delta x^{j+2} = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

(δ -абсолютный дифференциал в связности Γ^k_{ij}, ε_{ij} -бивектор, ковариантно постоянный в этой связности).

Л е м м а 3. $T(\mathcal{M}_2)$ со связностью $\overset{*}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}$ является конформно-евклидовым римановым пространством (связность $\overset{*}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}$ можно получить на квадрике Плюккера-Клейна, нормализованной автополярно по методу А.П.Нордена).

Л е м м а 4. Конформные преобразования $T(\mathcal{M}_2)$ индуцируются проективными преобразованиями $\mathcal{D}_3$, причем

$$(**)\ \ \mathcal{L}_{\vec{u}}\, g_{\alpha\beta} = (p + \nabla_k q^k + 2\mu_k x^{2+k})\, g_{\alpha\beta}$$

(где $\vec{u}$ определено формулой (*)). Из (**) следует, что параллельные переносы $\mathcal{D}_3$ индуцируют движения в $T(\mathcal{M}_2)$, а гомотетия $\mathcal{D}_3$ -слоевую гомотетию $T(\mathcal{M}_2)$.

Л е м м а 5. Пусть $\mathcal{M}_2$ -торс, $T(\mathcal{M}_2)$ -будет симметрическим пространством тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}_2$-цилиндр, построенный на конике с центром в начале координат.

Рассмотрим цилиндрическую индикатрису

$$\mathcal{M}_2 : \vec{a}(x^1, x^2) = x^1\vec{e}_1 + f(x^1)\vec{e}_2 + x^2\vec{e}_3,\ \ (f''(x^1) \neq 0).$$

Л е м м а 6. Группа движений $T(\mathcal{M}_2)$ зависит в общем случае от 6 параметров и от 7 параметров, когда плоское центральное сечение индикатрисы является W -кривой центроаффинной группы.

Л е м м а 7. Геодезические линии в $T(\mathcal{M}_2)$ (со связностью $\overset{*}{\Gamma}{}^\gamma_{\alpha\beta}$), которым в $\mathcal{D}_3$ соответствуют некоторые линейчатые поверхности, задаются уравнениями:

$$1/\ x^1 = c_1,\ x^2 = c_2 t + c_3,\ x^3 = c_4 t + c_5,\ x^4 = c_6 t + c_7,$$

$$2/\ x^2 = d_1 x^1 + d_2 f(x^1),\ x^3 = \frac{d_3 x^1 + d_4 f}{x^1 f' - f},$$

$$x^4 = d_5 \int (x^1 f' - f)\, dx^1 + \frac{1}{x^1 f' - f}(d_1 x^1 + d_2 f)(d_3 + d_4 f') + d_6,$$

где t -канонический параметр,

$$d_7 t + d_8 = \int (x^1 f' - f)\, dx^1,\ \ (d_7,\ c_7 = const).$$

1/ -изображаются в $\mathcal{D}_3$ плоскостями или гиперболическими параболоидами.

2/-стрикционная линия для этой линейчатой поверхности (она ищется из того условия, что прямая, параллельная образующей цилиндра, пересекает две бесконечно близкие образующие линейчатой поверхности) есть прямая, параллельная $\vec{e}_3$ с уравнением:

$$\vec{R}(x^1) = -d_4\vec{e}_1 + d\vec{e}_2 + \left(d_5 \int (x^1 f' - f)\, dx^1 + d_6\right)\vec{e}_3.$$

Итак, все образующие линейчатой поверхности проходят через прямую, параллельную $\vec{e}_3$; каждая образующая поворачивается вокруг этой прямой, оставаясь параллельной радиусу-вектору $\mathcal{M}_2 : \vec{a}(x^1, x^2)$, который движется по геодезической $\mathcal{M}_2$ (плоскому центральному сечению). В то же время образующая поднимается по прямой пропорционально изменению эквицентроаффинной дуги $S_{эц}$ плоского центрального сечения $\mathcal{M}_2$ ($S_{эц} = k\int (x^1 f^1 - f)\,dx^1$, $k = const$).

Рассмотрим, наконец, индикатрису $\mathcal{M}_2$, являющуюся поверхностью касательных к W-кривой центроаффинной группы.

Лемма 8. В общем случае группа движений в $T(\mathcal{M}_2)$ зависит от трех параметров. Если же центроаффинное кручение W-кривой равно нулю, то эта группа зависит от четырех параметров.

Список литературы

1. Широков А.П. К вопросу о релятивной линейчатой геометрии.- В кн.: Дифференциальная геометрия. Саратов, 1976.

2. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М. Наука, 1976.

3. Широков П.А., Широков А.П. Аффинная дифференциальная геометрия. М., Физматгиз, 1959.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.13 1982

А.В.Столяров

ДВОЙСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ГИПЕРПОЛОСНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения $\mathcal{H} \subset P_n$ m-мерных линейных элементов ($m < n-1$) автором изучалась в работе [7]. В настоящей статье геометрия указанного многообразия в n-мерном пространстве проективной связности $P_{n,n}$ строится с привлечением теории двойственности, что позволило вскрыть новые аспекты теории указанного многообразия и привело к ее обогащению новыми геометрическими фактами; найдены также некоторые приложения двойственной теории распределения $\mathcal{H} \subset P_{n,n}$.

На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения:

$$\bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{K}}, \bar{\mathcal{L}} = \overline{0,n}\,; \quad \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \mathcal{P}, Q = \overline{1,n}\,;$$

$$i,j,k,\ell,s,t = \overline{1,m}\,; \quad u,v,w = \overline{m+1,n-1}\,; \quad \alpha,\beta,\gamma, = \overline{m+1,n}\,;$$

$$\bar{i},\bar{j},\bar{k} = \overline{0,m}\,; \qquad \bar{u},\bar{v},\bar{w} = 0, m+1, \dots, n-1.$$

2. Рассмотрим классическое n-мерное пространство проективной связности $P_{n,n}$, определенное Э.Картаном [2], [11] с помощью $(n+1)^2$ форм Пфаффа $\omega_{\bar{\mathcal{J}}}^{\bar{\mathcal{K}}}$, подчиненных структурным уравнениям

$$\mathcal{D}\omega_{\bar{\mathcal{J}}}^{\bar{\mathcal{K}}} = \omega_{\bar{\mathcal{J}}}^{\bar{\mathcal{L}}} \wedge \omega_{\bar{\mathcal{L}}}^{\bar{\mathcal{K}}} + \frac{1}{2} R_{\bar{\mathcal{J}}PQ}^{\bar{\mathcal{K}}}\, \omega_0^P \wedge \omega_0^Q, \quad \omega_{\bar{\mathcal{L}}}^{\bar{\mathcal{L}}} = 0. \quad (1)$$

При этом независимые первые интегралы $u^1, u^2, \dots, u^n$ вполне интегрируемой системы линейно независимых уравнений $\omega_0^{\mathcal{J}} = 0$ являются локальными координатами точки $A(u)$ базы