3. Ш е ф е р Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971. 359 с.

УДК 514.75

ТАНГЕНЦИАЛЬНО ВЫРОЖДЕННАЯ ПОВЕРХНОСТЬ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ И НЕЕВКЛИДОВА МЕТРИКА

Н.В.А м и ш е в а

(Кемеровский государственный университет)

Известно, что геометрия возникла в глубокой древности и связана с измерением длин отрезков. Безуспешные попытки доказать пятый постулат Евклида привели к открытию новой, неевклидовой геометрии, основателем которой был Лобачевский. Риман стал изучать произвольные, так называемые римановы пространства, нашедшие важные приложения в механике, теории относительности и других науках. В данной статье доказывается, что задание тангенциально вырожденной поверхности в аффинном пространстве порождает неевклидову метрику всего пространства.

Рассмотрим в n-мерном аффинном пространстве m-мерную тангенциально вырожденную поверхность ранга τ [1], которую обозначим V^m_τ. Деривационные формулы подвижного репера $\{A, e_J\}$ $(J, \mathcal{J} = 1,\dots,n)$ аффинного пространства имеют вид $dA = \omega^J e_J$, $de_J = \omega^{\mathcal{J}}_J e_{\mathcal{J}}$, где ω^J, $\omega^{\mathcal{J}}_J$ — формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства.

Т е о р е м а. Задание любой тангенциально вырожденной m-поверхности V^m_τ ранга τ $(\tau \neq m-1)$ в аффинном пространстве определяет в этом пространстве метрику, т.е. пространство становится псевдоримановым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем искать абсолют в виде $b_{J\mathcal{J}} x^J x^{\mathcal{J}} = 1$, считая, что центр абсолюта совпадает с началом координат, которое помещено в образующую плоскость поверхности V^m_τ. Если векторы $e_1,\dots, e_m$ направить параллельно касательной плоскости L_m поверхности, а векторы $e_1,\dots,e_{m-\tau}$ параллельно образующей плоскости $L_{m-\tau}$ этой поверхности, то дифференциальные уравнения тангенциально вырожденной поверхности примут вид:

$$\omega^i = 0, \quad \omega^i_a = 0, \quad \omega^i_p = \Lambda^i_{pq}\,\omega^q, \quad \omega^p_a = \Lambda^p_{aq}\,\omega^q \qquad (1)$$
$$(a, b = \overline{1, m-\tau}; \quad p, q = m-\tau+1,\dots,m; \quad \sigma = \overline{1,m}; \quad i, j = m+1,\dots,n),$$

причем коэффициенты связаны соотношениями:

$$\Lambda^i_{pq} = \Lambda^i_{qp}, \quad \Lambda^p_{aq}\Lambda^i_{ps} = \Lambda^p_{as}\Lambda^i_{pq}.$$

Известно, что в каждой образующей плоскости поверхности имеется фокусная алгебраическая поверхность F [1], [2], определяемая уравнениями:

$$x^i = 0, \quad x^p = 0, \quad \det \| \Lambda^p_{aq} x^a + \delta^p_q \| = 0. \qquad (2)$$

Если ранг $\tau \geqslant 2$, то полярой порядка $\tau-2$ начала координат относительно поверхности F является квадрика $Q_{m-\tau-1}$:

$$x^i = 0, \; x^p = 0, \; \Gamma_{(a,b)} x^a x^b + \Gamma_a x^a = 1,$$

где $\Gamma_{(a,b)}$, Γ_a выражаются через величины Λ^p_{aq} [3]. Линейной же полярой для начала координат относительно F есть плоскость

$$\pi_{m-\tau-1}: \quad x^i = 0, \; x^p = 0, \; \Gamma_a x^a = 1.$$

Если $\tau = 1$, то фокусная алгебраическая поверхность F является $(m-\tau-1)$-плоскостью, которую также обозначим $\pi_{m-\tau-1}$. Выберем координатную плоскость $L_{m-\tau-1} = \{e_2,\dots,e_{m-\tau}\}$ параллельно плоскости $\pi_{m-\tau-1}$, а вектор e_1 направим по касательной к кривой Γ, лежащей в образующей плоскости, при движении вдоль которой плоскость $L_{m-\tau-1}$ остается неизменной. Так как плоскость $L_{m-\tau-1}$ можно построить в любой точке образующей плоскости, то можно говорить о распределении $\Delta_{m-\tau-1}$, определенном в образующей плоскости и ставящем в соответствие каждой точке этой плоскости $(m-\tau-1)$-плоскость $L_{m-\tau-1}$. Выбор вектора e_1, исключает из рассмотрения случай, когда характеристика плоскости $L_{m-\tau-1}$ вдоль распределения $\Delta_{m-\tau-1}$ ненулевая. Конец вектора e_1 поместим в точку A_1 пересечения касательной к кривой Γ с плоскостью $\pi_{m-\tau-1}$. В работе [4] было проведено построение плоскости L_τ, трансверсальной образующей плоскости. Считая, что эта плоскость уже построена, направим векторы $e_{m-\tau+1},\dots, e_m$ параллельно плоскости L_τ. Такая фиксация репера приводит к следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{cases} \omega^a_p = \Lambda^a_{pb}\,\omega^b + \Lambda^a_{pq}\,\omega^q, \quad \omega^a_1 = \Lambda^a_{1b}\,\omega^b + \Lambda^a_{1q}\,\omega^q, \\ \omega^1_{a'} = \Lambda^1_{a'b}\,\omega^b + \Lambda^1_{a'q}\,\omega^q \qquad (a', b' = 2,\dots, m-\tau), \end{cases} \qquad (3)$$

коэффициенты которых связаны соотношениями:

$$\begin{cases} \det \| \Lambda^{1}_{a'b'} \| \neq 0, \quad \det \| \Lambda^{1}_{b'2} \dots \Lambda^{1}_{b'a-1} \Lambda^{1}_{b'1} \Lambda^{1}_{b'a+1} \dots \Lambda^{1}_{b'm-1} \| = 0, \\ \Gamma_1 = -1, \ \Gamma_{a'} = 0 \ (\text{при } r \geqslant 2), \ \Lambda^{m}_{1m} = -1, \ \Lambda^{m}_{a'm} = 0 \ (\text{при } r = 1). \end{cases} \tag{4}$$

Замыкая первые два уравнения системы (3) и разрешая по лемме Картана, получаем:

$$\begin{aligned} &d\Lambda^{a}_{1c} + \Lambda^{b}_{1c}\omega^{a}_{b} - \Lambda^{a}_{1b}\omega^{b}_{c} + \Lambda^{a}_{1b}\Lambda^{b}_{qc}\omega^{q} - \Lambda^{a}_{1q}\Lambda^{q}_{cr}\omega^{r} = \Lambda^{a}_{1cb}\omega^{b} + \Lambda^{a}_{1cq}\omega^{q}, \\ &d\Lambda^{a}_{1q} + \Lambda^{b}_{1q}\omega^{a}_{b} + \Lambda^{p}_{1q}\omega^{a}_{p} - \Lambda^{a}_{1b}\Lambda^{b}_{rq}\omega^{r} - \Lambda^{a}_{1r}\omega^{r}_{q} = \Lambda^{a}_{1qb}\omega^{b} + \Lambda^{a}_{1qp}\omega^{p}, \\ &d\Lambda^{a}_{pc} + \Lambda^{b}_{pc}\omega^{a}_{b} - \Lambda^{a}_{qc}\omega^{q}_{p} - \Lambda^{a}_{pb}\omega^{b}_{c} + \Lambda^{a}_{pb}\Lambda^{b}_{qc}\omega^{q} - \Lambda^{a}_{pq}\Lambda^{q}_{cr}\omega^{r} = \Lambda^{a}_{pcb}\omega^{b} + \Lambda^{a}_{pcq}\omega^{q}, \\ &d\Lambda^{a}_{pr} + \Lambda^{b}_{pr}\omega^{a}_{b} - \Lambda^{a}_{qr}\omega^{q}_{p} + \Lambda^{i}_{pr}\omega^{a}_{i} + \Lambda^{a}_{pb}\Lambda^{b}_{qr}\omega^{q} - \Lambda^{a}_{pq}\omega^{q}_{r} = \Lambda^{a}_{prb}\omega^{b} + \Lambda^{a}_{prq}\omega^{q}. \end{aligned} \tag{5}$$

Касательную плоскость π ко всем интегральным кривым, описываемым точкой A_1 вдоль смещений, при которых движение плоскости L_r параллельно вектору e_1, можно задать системой уравнений:

$$\alpha^{m-r+k}_{1}(x^{1}-1) + \alpha^{m-r+k}_{2}x^{2} + \dots + \alpha^{m-r+k}_{m-r}x^{m-2} + \alpha^{m-r+k}_{m-r+k}x^{m-r+k} = 0 \tag{6}$$

($k = 1, \dots, r$; по $m-r+k$ не суммировать), коэффициенты которой определяются по формулам:

$$\alpha^{m-r+k}_{m-r+k} = (-1)^{m-r+k+1} \det \| \delta^{b}_{a} + \Lambda^{b}_{1a} + \Lambda^{b}_{1p}\lambda^{p}_{a} \|, \qquad \alpha^{m-r+k}_{\alpha} =$$

$$= (-1)^{a+1} \begin{vmatrix} 1+\Lambda^{1}_{11}+\Lambda^{1}_{1p}\lambda^{p}_{1} \dots \Lambda^{a-1}_{11}+\Lambda^{a-1}_{1p}\lambda^{p}_{1} \ \Lambda^{a+1}_{11}+\Lambda^{a+1}_{1p}\lambda^{p}_{1} \dots \Lambda^{m-2}_{11}+\Lambda^{m-2}_{1p}\lambda^{p}_{1} \ \Lambda^{m-r+k}_{1p}\lambda^{p}_{1}+\Lambda^{m-r+k}_{1} \\ \Lambda^{1}_{12}+\Lambda^{1}_{1p}\lambda^{p}_{2} \dots \Lambda^{a-1}_{12}+\Lambda^{a-1}_{1p}\lambda^{p}_{2} \ \Lambda^{a+1}_{12}+\Lambda^{a+1}_{1p}\lambda^{p}_{2} \dots \Lambda^{m-r}_{12}+\Lambda^{m-r}_{1p}\lambda^{p}_{2} \ \Lambda^{m-r+k}_{1p}\lambda^{p}_{2}+\Lambda^{m-r+k}_{2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Lambda^{1}_{1m-r}+\Lambda^{1}_{1p}\lambda^{p}_{m-r} \dots \Lambda^{a-1}_{1m-r}+\Lambda^{a-1}_{1p}\lambda^{p}_{m-r} \ \Lambda^{a+1}_{1m-r}+\Lambda^{a+1}_{1p}\lambda^{p}_{m-r} \dots 1+\Lambda^{m-r}_{1m-r}+\Lambda^{m-r}_{1p}\lambda^{p}_{m-r} \ \Lambda^{m-r+k}_{1p}\lambda^{p}_{m-r}\Lambda^{m-r+k}_{m-r} \end{vmatrix},$$

$$\lambda^{p}_{a} = (-1)^{p+2}\Lambda^{1}_{m-r+a} \begin{vmatrix} \Lambda^{1}_{m-r+2,m-r+1} \dots \Lambda^{1}_{m-r+2,p-1} \ \Lambda^{1}_{m-r+2,p+1} \dots \Lambda^{1}_{m-r+2,m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \Lambda^{1}_{m,m-r+1} \dots \Lambda^{1}_{m,p-1} \ \Lambda^{1}_{m,p+1} \dots \Lambda^{1}_{m,m} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{p+r+1}\Lambda^{1}_{ma} \begin{vmatrix} \Lambda^{1}_{m-r+1,m-r+1} \dots \Lambda^{1}_{m-r+1,p-1} \ \Lambda^{1}_{m-r+1,p+1} \dots \Lambda^{1}_{m-r+1,m} \\ \\ \Lambda^{1}_{m-1,m-r+1} \dots \Lambda^{1}_{m-1,p-1} \ \Lambda^{1}_{m-1,p+1} \dots \Lambda^{1}_{m-1,m} \end{vmatrix}.$$

В общем случае плоскость π пересекает плоскость L_r в некоторой точке

$$M_1(0, \dots, 0, x^{m-r+1}_{1}, \dots, x^{m}_{1}), \text{ где } x^{m-r+k}_{1} = \alpha^{m-r+k}_{1} / \alpha^{m-r+k}_{m-r+k} \quad (k = 1, \dots, r).$$

Совместив вектор e_{m-r+1} с вектором AM_1, получим равенства

$$\alpha^{m-r+2}_{1} = \dots = \alpha^{m}_{1} = 0, \quad \alpha^{m-r+1}_{1} = \alpha^{m-r+1}_{m-r+1}.$$

Формы $\omega^{m-r+1}_{m-r+1}, \dots, \omega^{m}_{m-r+1}$ становятся главными и их разложение по базисным запишем в виде:

$$\omega^{q}_{m-r+1} = \Lambda^{q}_{m-r+1,a}\omega^{a} + \Lambda^{q}_{m-r+1,p}\omega^{p}. \tag{7}$$

Если начало координат описывает кривую γ с касательным вектором e_{m-r+1}, точка A_1 опишет кривую γ_1 с касательной, параллельной вектору

$$m = e_{m-r+1} + \Lambda^{a}_{1,m-r+1}e_a + \Lambda^{p}_{1,m-r+1}e_p.$$

Проекция касательной к кривой γ_1 на образующую плоскость L_{m-2} параллельно L_r пересекает плоскость L_{m-r-1} в точке

$$A_2(0, -\Lambda^{2}_{1,m-r+1} / \Lambda^{1}_{1,m-r+1}, \dots, -\Lambda^{m-r}_{1,m-r+1} / \Lambda^{1}_{1,m-r+1}).$$

Приняв вектор AA_2 за базисный вектор e_2, будем иметь соотношения

$$\Lambda^{2}_{1,m-r+1} = -\Lambda^{1}_{1,m-r+1}, \ \Lambda^{3}_{1,m-r+1} = 0, \dots, \Lambda^{m-r}_{1,m-r+1} = 0.$$

Формы $\omega^{2}_{2}, \dots, \omega^{m-r}_{2}$ становятся главными:

$$\omega^{a'}_{2} = \Lambda^{a'}_{2b}\omega^{b} + \Lambda^{a'}_{2p}\omega^{p} \quad (a' = 2, \dots, m-2).$$

Плоскость, проходящая через точку A_2 и параллельная плоскости π, пересекает плоскость L_r в точке

$$M_2(0, \dots, 0, x^{m-r+1}_{2}, \dots, x^{m}_{2}), \text{ где } x^{m-r+k}_{2} = \alpha^{m-r+k}_{2} / \alpha^{m-r+k}_{m-r+k} \quad (k = 1, \dots, r).$$

Процесс можно продолжить, беря в качестве точки A_s ($s = 3, \dots$), например, середину отрезка $A_1 A_{s-1}$. Плоскость, проходящая через точку A_s параллельно плоскости π, пересечет плоскость L_r в точке $M_s(0, \dots, 0, x^{m-r+1}_{s}, \dots, x^{m}_{s})$. Если $r \geqslant n-m+1$, то процесс продолжим r раз, если $r < n-m+1$, то продолжим $n-m+1$ раз. В силу вышесказанного векторы $e_{m-r+1}, \dots, e_m$ можно совместить с векторами $AM_1, \dots, AM_r$. При такой фиксации формы ω^{q}_{p} становятся главными:

$$\omega^{q}_{p} = \Lambda^{q}_{pa}\omega^{a} + \Lambda^{q}_{pr}\omega^{r}. \tag{8}$$

Касательные к кривым, описываемым точками $M_1, \dots, M_{n-m+1}$ вдоль смещения, при котором начало координат описывает кривую γ, в общем случае выходят за пределы касательной плоскости. Направляющие векторы этих касательных обозначим $N_1, N_2, \ldots, N_{n-m+1}$. В силу формул (5), (6) и (8) можно сказать, что $dx_s^p = d(\alpha_s^p/\alpha_{m-\tau+k}^{m-\tau+k})$ имеет разложение по базисным формам, которое запишем в виде:

$$dx_s^p = d\left(\alpha_s^p/\alpha_{m-\tau+k}^{m-\tau+k}\right) = \xi_{sa}^p\,\omega^a + \xi_{sq}^p\,\omega^q.$$

Касательный вектор к кривой, описываемой точкой M_s $(s=1,\ldots,n-m+1)$ при таком ее движении, при котором начало смещается в направлении вектора $e_{m-\tau+1}$, будет иметь вид:

$$N_s = \alpha_s^p\,\Lambda_{p,m-\tau+1}^a e_a + (\xi_{s,m-\tau+1}^p + \alpha_s^q\,\Lambda_{q,m-\tau+1}^p)e_p + \alpha_s^q\,\Lambda_{q,m-\tau+1}^i e_i.$$

Через точку M_1 проведем гиперплоскость, параллельную плоскости $L_{m-\tau}$ и векторам

$$e_{m-\tau+2}, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n, N_{n-m+1}.$$

Эта плоскость пересечет координатную прямую с направляющим вектором e_i в точке

$$B_i\left(0, \ldots, 0, -\frac{\alpha_{n-m+1}^q\,\Lambda_{q,m-\tau+1}^i}{\xi_{n-m+1,m-\tau+1}^{m-\tau+1} + \alpha_{n-m+1}^q\,\Lambda_{q,m-\tau+1}^{m-\tau+1}}, 0, \ldots, 0\right).$$

Итак, на каждой координатной прямой, параллельной вектору e_i, имеем инвариантную точку B_i. Абсолют выбираем таким образом, чтобы сечение абсолюта с образующей плоскостью $L_{m-\tau}$ поверхности V_τ^m совпадало с квадрикой, полученной перенесением квадрики $Q_{m-\tau-1}$, при котором центр квадрики совмещен с началом координат. Это возможно, когда ранг поверхности $\tau \geqslant 2$. При этом коэффициенты абсолюта определяются равенствами $b_{ab} = \Gamma_{(ab)}$.

Если ранг $\tau = 1$, произведем в образующей плоскости поверхности V_τ^m дополнительные построения. Проекция точки A_2 на плоскость $\pi_{m-\tau-1}$ параллельно вектору e_1 дает точку $A_2'(1,1,0,\ldots,0)$. Если начало координат описывает кривую γ с касательным вектором $e_{m-\tau+1}$, точка A_2 опишет кривую γ_2 с касательной, параллельной вектору

$$e_{m-\tau+1} + (\Lambda_{1,m-\tau+1}^a + \Lambda_{2,m-\tau+1}^a)e_a + (\Lambda_{1,m-\tau+1}^p + \Lambda_{2,m-\tau+1}^p)e_p.$$

Проекция касательной к кривой γ_2 на образующую плоскость параллельно плоскости L_τ пересекает плоскость $L_{m-\tau+1}$ в точке

$$A_3\left(0, 1 - \frac{\Lambda_{1,m-\tau+1}^2 + \Lambda_{2,m-\tau+1}^2}{\Lambda_{1,m-\tau+1}^1 + \Lambda_{2,m-\tau+1}^1}, -\frac{\Lambda_{2,m-\tau+1}^3}{\Lambda_{1,m-\tau+1}^1 + \Lambda_{2,m-\tau+1}^1}, \ldots, -\frac{\Lambda_{2,m-\tau+1}^{m-\tau}}{\Lambda_{1,m-\tau+1}^1 + \Lambda_{2,m-\tau+1}^1}\right).$$

Совместив вектор e_3 с вектором AA_3, продолжим процесс, проведя описанные построения для точки $A_3'(1,0,1,0,\ldots,0)$ и так далее,

получая в плоскости $L_{m-\tau-1}$ инвариантные точки $A_2, A_3, \ldots, A_{m-\tau}$. Такое построение возможно и при $\tau > 1$.

В случае, когда $\tau = 1$, абсолют выбираем таким образом, чтобы векторы $AA_1, AA_2, \ldots, AA_{m-\tau}$ были попарно сопряжены относительно сечения абсолюта образующей плоскостью поверхности V_τ^m, а точки $A_1, \ldots, A_{m-\tau}$ лежали на этом сечении. Тогда коэффициенты определяются равенствами: $b_{aa} = 1$, $b_{ab} = 0$ $(a \neq b)$.

Дальнейшее построение абсолюта проведем таким образом, чтобы плоскости $L_{m-\tau}$ и L_τ, а также плоскости L_{n-m} и L_m были сопряжены относительно абсолюта; векторы $e_{m-\tau+1}, \ldots, e_m$, а также векторы $e_{m+1}, \ldots, e_n$ были попарно сопряжены относительно абсолюта; требуем, чтобы точки $M_1, \ldots, M_\tau, B_{n-m+1}, \ldots, B_n$ лежали на абсолюте. В этом случае коэффициенты абсолюта определяются равенствами

$$b_{ap} = 0, \quad b_{pq} = 0 \quad (p \neq q), \quad b_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad b_{pp} = 1,$$

$$b_{ii} = \left(\frac{\xi_{n-m+1,m-\tau+1}^{m-\tau+1} + \alpha_{n-m+1}^q\,\Lambda_{q,m-\tau+1}^{m-\tau+1}}{\alpha_{n-m+1}^q\,\Lambda_{q,m-\tau+1}^i}\right)^2.$$

Все коэффициенты абсолюта определены и построение его закончено.

Библиографический список

I. А к и в и с М.А. Многомерная дифференциальная геометрия / Калининский ун-т. Калинин, 1977. 88с.

2. А к и в и с М.А. Фокальные образы поверхности ранга τ // Известия вузов. Матем. 1957. № I. С. 9-19.

3. А м и ш е в а Н.В. Некоторые вопросы аффинной геометрии тангенциально вырожденной поверхности. 1980. 17 с. Деп. в ВИНИТИ. № 3826-80.

4. А м и ш е в а Н.В. Об оснащении одного класса тангенциально вырожденных поверхностей // Известия вузов. Матем. 1990. № 6. С. 10-13.

5. А м и ш е в а Н.В. Инвариантное оснащение тангенциально вырожденных поверхностей // Тезисы докл. III Всесоюз. школы по оптимальному управлению, геометрии и анализу. Кемерово, 1990. С.5.

6. Л у м и с т е Ю.Г. Средняя поверхность конгруэнции плоскостей аффинного пространства // Известия вузов. Матем.

1965. № 5.
7. Розенфельд Б.А. Неевклидовы пространства. М.: Наука, 1969. 547 с.

УДК 514.75

СТРУКТУРЫ ТЕОРИИ ТОЧЕЧНЫХ СООТВЕТСТВИЙ В ГЕОМЕТРИИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Б.А.Андреев
(Калининградский государственный университет)

В работе показано, что нормализованная гиперповерхность S расширенного аффинного пространства P_{n+1} порождает семейство точечных соответствий n-мерных аффинных пространств. Исследуется возникающая при этом связь основных понятий и образов теории точечных соответствий [1], [2]: локальной коллинеации Чеха, характеристических направлений, связности Г.Врэнчану с такими понятиями теории нормализованных гиперповерхностей, как направления Дарбу, канонический пучок соприкасающихся гиперквадрик, чебышевский вектор, внутренние связности I-го и 2-го рода.

§ I. Отображения, порожденные нормализованной гиперповерхностью

Рассмотрим $(n+1)$-мерное проективное пространство P_{n+1}, в котором зафиксирована гиперплоскость P_n. Отнесем пространство P_{n+1} к подвижному реперу $R=\{R_0, R_J\}$ $(J,\ldots=\overline{1,n+1})$; деривационные формулы репера R имеют вид

$$d\bar{R}_0=\tilde{\omega}_0^0\bar{R}_0+\tilde{\omega}_0^J\bar{R}_J,\quad d\bar{R}_J=\tilde{\omega}_J^0\bar{R}_0+\tilde{\omega}_J^K\bar{R}_K. \qquad (I.1)$$

Формы Пфаффа $\tilde{\omega}_{\bar{J}}^{\bar{K}}$ $(\bar{J},\ldots=\overline{0,n+1})$ подчиняются уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\tilde{\omega}_{\bar{J}}^{\bar{K}}=\tilde{\omega}_{\bar{J}}^{\bar{T}}\wedge\tilde{\omega}_{\bar{T}}^{\bar{K}}. \qquad (I.2)$$

Поместив на гиперплоскость P_n вершины R_J, имеем:

$$\tilde{\omega}_J^0\equiv 0. \qquad (I.3)$$

Будем рассматривать пространство P_{n+1} как расширенное аффинное пространство; при этом в силу (I.2) формы Пфаффа

$$\omega^J=\tilde{\omega}_0^J,\quad \omega_J^K=\tilde{\omega}_J^K-\delta_J^K\tilde{\omega}_0^0 \qquad (I.4)$$

подчиняются уравнениям структуры $(n+1)$-мерного аффинного пространства. Заметим, что из (1.2) и (1.3) вытекает

$$\mathcal{D}\omega_J^K=\omega_J^T\wedge\omega_T^K. \qquad (I.5)$$

Это означает, что точки R_J образуют подвижный репер n-мерного проективного пространства P_n.

Рассмотрим в P_{n+1} гиперповерхность S. Совместив вершину R_0 репера R с текущей точкой P гиперповерхности, а точки R_i $(i,\ldots=\overline{1,n})$ поместив в касательную плоскость T_P к S в точке P, получим репер I-го порядка гиперповерхности S. Дифференциальное уравнение гиперповерхности в этом репере имеет вид:

$$\omega^{n+1}=0. \qquad (I.6)$$

Продолжения уравнения (I.6) приводят к уравнениям:

$$\omega_i^{n+1}=\Lambda_{ij}\omega^j, \qquad (I.7)$$

$$\nabla\Lambda_{ij}=-\Lambda_{ij}\omega_{n+1}^{n+1}+\Lambda_{ijk}\omega^k, \qquad (I.8)$$

$$\nabla\Lambda_{ijk}=-\Lambda_{ijk}\omega_{n+1}^{n+1}+\Lambda_{(ij}\Lambda_{k)\ell}\omega_{n+k}^{\ell}+\Lambda_{ijk\ell}\omega^{\ell}. \qquad (I.9)$$

Здесь ∇ - оператор, определенный в [3, с.29], скобки означают циклирование, а компоненты $\Lambda_{ij}, \Lambda_{ijk}, \Lambda_{ijk\ell}$ фундаментальных объектов симметричны относительно всех своих индексов.

Оснастим поверхность S полем нормалей 1-го рода, т.е. прямых N_P, трансверсальных поверхности в соответствующих точках P. Поместив на нормали N_P вершину R_{n+1} репера, получим уравнения прямой N_P в виде

$$x^i=0, \qquad (I.10)$$

а систему дифференциальных уравнений поля нормалей в виде

$$\omega_{n+1}^{\ell}=\nu_i^{\ell}\omega^i. \qquad (I.11)$$

Пусть π_P - нормаль 2-го рода гиперповерхности S, которая является пересечением касательной в точке P к S гиперплоскости T_P с гиперплоскостью P_n.

Нормали π_P являются элементами n-мерного проективного пространства P_n^*, двойственного к P_n. Формы Пфаффа ω_i^{n+1} являются структурными формами пространства P_n^*. В общем случае имеем:

$$\operatorname{rang}[\Lambda_{ij}]=n. \qquad (I.12)$$

Таким образом, каждой точке $P\in S$ поставлен в соответствие единственный элемент $\pi_P\in P_n^*$, а система (1.7) является системой дифференциальных уравнений отображения