УДК 681.3.07

С. И. Алешников, Ю. Ф. Болтнев, З. Език,
С. А. Ишанов, В. Куих

ФОРМАЛЬНЫЕ ЯЗЫКИ И АВТОМАТЫ V: ПАРЫ ПОЛУКОЛЬЦО-ПОЛУМОДУЛЬ КОНВЕЯ И КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ

Это пятая статья в серии, дающей обзор некоторых разделов теории формальных языков и автоматов с использованием полуколец, формальных степенных рядов, матриц и теории неподвижных точек.

Рассмотрены основные результаты теории конечных автоматов над квемикольцами, обобщающих классические конечные автоматы, принимающие конечные и бесконечные слова, базирующихся на парах полукольцо-полумодуль, в основном на парах полукольцо-полумодуль Конвея — парах, состоящих из полукольца Конвея и полумодуля, удовлетворяющего тождествам «омега-сумма» и «омега-произведение». Они определены и сформулирлваны некоторые их важные свойства. Введены конечные автоматы над квемикольцами и доказана теорема Клини. Введены линейные системы над квемикольцами как обобщение регулярных грамматик с конечными и бесконечными выводами и связаны некоторые решения этих линейных систем с поведением конечных автоматов над квемикольцами.

This is the fifth paper of a series of papers that will give a survey on several topics on formal languages and automata by using semirings, formal power series, matrices and fixed point theory. The fifth paper of this series deals with the basic results in the theory of finite automata over quemirings generalizing the classical finite automata accepting finite and infinite words. The presentation of these results is based on semiring-semimodule pairs, especially on Conway semiring-semimodule pairs.

A Conway semiring-semimodule pair is a pair consisting of a Conway semiring and a semimodule that satisfies the sum-omega equation and the product-omega equation. We define these Conway semiring-semimodule pairs and state some of their important properties. Then we introduce finite automata over quemirings and prove a Kleene Theorem. Furthermore, we introduce linear systems over quemirings as a generalization of regular grammars with finite and infinite derivations, and connect certain solutions of these linear systems with the behavior of finite automata over quemirings.

Ключевые слова: формальный язык, автомат, полукольцо, формальный степенной ряд, матрица, неподвижная точка.

Keywords: formal languages, automata, semiring, formal power series, matrix, fixed point.

1. Введение

Это пятая статья в серии, дающей обзор некоторых разделов теории формальных языков и автоматов и излагающих обобщение некоторых классических результатов о формальных языках, формальных языках над деревьями, формальных языках с конечными и бесконечными словами, автоматах, автоматах над деревьями и т. д. Мы предполагаем, что читатель знаком с предыдущими частями [1—4] серии.

В данной статье мы рассматриваем пары полукольцо-полумодуль и конечные автоматы над квемикольцами. Здесь пары полукольцо-полумодуль образуют обобщение формальных языков с конечными и бесконечными словами. Полукольцо является моделью формального языка с конечными словами, тогда как полумодуль — модель формального языка с бесконечными словами. Главный результат этой статьи — обобщение теоремы Клини [6] для пар полукольцо-полумодуль.

Настоящая статья состоит из пяти глав. В главе 2 мы введем используемые алгебраические структуры: пары полукольцо-полумодуль и квемикольца.

В главе 3 мы рассмотрим пары полукольцо-полумодуль Конвея и докажем, что выполняется тождество «омега-матрица». Далее для пары полукольцо-полумодуль Конвея мы рассмотрим $n \times n$-матрицы над полукольцом и $n \times 1$-вектор-столбцы над полумодулем. Затем мы докажем, что пары, состоящие из матриц и вектор-столбцов, опять образуют пару полукольцо-полумодуль Конвея.

В главе 4 мы определим конечные автоматы над квемикольцами. Для пары полукольцо-полумодуль Конвея мы докажем теорему Клини для A'-конечного автомата, где A' — подмножество полукольца Конвея: множество всех поведений A'-конечного автомата совпадает с обобщенным квемикольцом со звездой, порожденным A'. Частный случай этой теоремы Клини — результат Buechi [6].

В главе 5 мы рассмотрим линейные системы над квемикольцами как обобщение регулярных грамматик с конечными и бесконечными выводами и покажем связь между некоторыми решениями этих линейных систем, весами конечных и бесконечных выводов относительно этой грамматики и поведением конечных автоматов над квемикольцами.

Изложение соответствует работе Esik, Kuich [11].

2. Предварительные сведения

Мы предполагаем, что читатель этой статьи знаком с определениями и результатами части I [1] серии статей, поэтому не будем их здесь повторять. Также далее используются обозначения части I [1].

Предположим, что A — полукольцо и V — коммутативный моноид, записанный аддитивно. Назовем V (левым) *A-полумодулем*, если V оснащен (левосторонней) операцией

$$\begin{array}{rcl} A \times V & \to & V, \\ (s, v) & \mapsto & sv, \end{array}$$

удовлетворяющей следующим правилам:

$$\begin{array}{rcl} s(s'v) & = & (ss')v, \\ (s + s')v & = & sv + s'v, \\ s(v + v') & = & sv + sv', \\ 1v & = & v, \\ 0v & = & 0, \\ s0 & = & 0 \end{array}$$

для всех $s, s' \in A$ и $v, v' \in V$. Если V является A-полумодулем, будем называть (A, V) *парой полукольцо-полумодуль*.

Пусть (A, V) — пара полукольцо-полумодуль такая, что A — полукольцо со звездой, а A и V оснащены омега-операцией $^{\omega} : A \to V$. Тогда назовем (A, V) *парой полукольцо со звездой-омега-полумодуль*. Согласно Bloom, Esik [5], будем называть пару полукольцо со звездой-омега-полумодуль (A, V) *парой полукольцо-полумодуль Конвея*, если A — полукольцо Конвея и если омега-операция удовлетворяет *тождеству «омега-сумма»* и *тождеству «омега-произведение»:*

$$\begin{array}{rcl} (a + b)^{\omega} & = & (a^*b)^{\omega} + (a^*b)^*a^{\omega}, \\ (ab)^{\omega} & = & a(ba)^{\omega} \end{array}$$

для всех $a, b \in A$. Далее следует, что выполняется *тождество «омега неподвижной точки»,* т. е.

$$aa^{\omega} \quad = \quad a^{\omega}$$

для всех $a \in A$.

Esik, Kuich [10] определяют *полную пару полукольцо-полумодуль* как такую пару полукольцо-полумодуль (A, V), что A — полное полукольцо и V — полный моноид такие, что

$$\begin{array}{rcl} s(\sum\limits_{i \in I} v_i) & = & \sum\limits_{i \in I} sv_i, \\ (\sum\limits_{i \in I} s_i)v & = & \sum\limits_{i \in I} s_i v \end{array}$$

для всех $s \in A$, $v \in V$ и для всех семейств s_i, $i \in I$ над A и v_i, $i \in I$ над V. Кроме того, требуется, чтобы *операция бесконечного произведения*

$$(s_1, s_2, \ldots) \quad \mapsto \quad \prod_{j \geqslant 1} s_j$$

являлась отображением бесконечных последовательностей над A в V, удовлетворяющих следующим трем условиям:

$$\begin{aligned}
\prod_{i\geqslant 1} s_i &= \prod_{i\geqslant 1}(s_{n_{i-1}+1}\cdot\ldots\cdot s_{n_i}),\\
s_1\cdot\prod_{i\geqslant 1} s_{i+1} &= \prod_{i\geqslant 1} s_i,\\
\prod_{j\geqslant 1}\sum_{i_j\in I_j} s_{i_j} &= \sum_{(i_1,i_2,\ldots)\in I_1\times I_2\times\ldots}\prod_{j\geqslant 1} s_{i_j},
\end{aligned}$$

где в первом равенстве $0 = n_0 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots$ и $I_1, I_2, \ldots$ — произвольные множества индексов. Предположим, что пара (A, V) — полная. Тогда определим

$$\begin{aligned}
s^* &= \sum_{i\geqslant 0} s^i,\\
s^\omega &= \prod_{i\geqslant 1} s
\end{aligned}$$

для всех $s \in A$. Это превращает (A, V) в пару полукольцо со звездой-омега-полумодуль. Согласно Esik, Kuich [10], каждая пара полукольцо-полумодуль является парой полукольцо-полумодуль Конвея. Заметим, что если (A, V) — полная пара полукольцо-полумодуль, то $0^\omega = 0$.

Пара полукольцо-полумодуль (A, V) называется *непрерывной*, если (A, V) — полная пара полукольцо-полумодуль и A — непрерывное полукольцо. Квемикольцо называется *непрерывным*, если оно определяется непрерывной парой полукольцо-полумодуль.

Звезда-омега-полукольцо — это полукольцо A, оснащенное унарными операциями * и $^\omega : A \to A$. Звезда-омега-полукольцо A называется *полным*, если (A, A) — полная пара полукольцо-полумодуль, т. е. если A полное и наделено операцией бесконечного произведения, которая удовлетворяет трем условиям, приведенным выше. Полное звезда-омега-полукольцо A называется *коммутативным*, если полукольцо A коммутативно и для всех биекций $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s_j \in A$, $j \geqslant 0$, $\prod_{j\geqslant 0} s_{\pi(j)} = \prod_{j\geqslant 0} s_j$. Наконец, полное звезда-омега-полукольцо A называется *непрерывным*, если полукольцо A непрерывно.

Пример 2.1. Предположим, что Σ — алфавит. Пусть Σ^* обозначает множество всех конечных слов над Σ, включая пустое слово ε, и пусть Σ^ω обозначает множество всех ω-слов над Σ. Множество 2^{Σ^*} всех подмножеств множества Σ^*, наделенное операциями объединения множеств в качестве суммы и конкатенации в качестве произведения является полукольцом, где 0 — пустое множество $\emptyset$ и 1 — множество $\{\varepsilon\}$. Кроме того, наделенное обычной операцией «звезда» 2^{Σ^*} является полукольцом Конвея. К тому же 2^{Σ^∞}, наделенное операцией объединения в качестве суммы и пустым множеством в качестве 0, является коммутативным идемпотентным моноидом. Определим действие 2^{Σ^*} на 2^{Σ^∞}

посредством $KL = \{uv \mid u \in K,\ v \in L\}$ для всех $K \subseteq \Sigma^*$ и $L \subseteq \Sigma^\omega$. Кроме того, для любой последовательности $(K_0, K_1, \ldots)$ над 2^{Σ^*} пусть $\prod_{j\geqslant 0} K_j = \{u_0u_1\ldots \in \Sigma^\omega \mid u_i \in K_i,\ i \geqslant 0\}$. Тогда $(2^{\Sigma^*}, 2^{\Sigma^\infty})$ является полной и непрерывной парой полукольцо-полумодуль с идемпотентным модулем 2^{Σ^∞}. Заметим, что в этом примере $1^\omega = 0$, где $1 = \{\varepsilon\}$ и $0 = \emptyset$.

□

Пример 2.2. Рассмотрим полукольцо $\mathbb{N}^\infty = N \cup \{\infty\}$, полученное присоединением элемента ∞ к полукольцу натуральных чисел. Заметим, что $\mathbb{N}^\infty$ является полным полукольцом, где бесконечная сумма равна ∞ тогда и только тогда, когда либо слагамое равно ∞, либо количество ненулевых слагаемых бесконечно. Кроме того, ∞ в произведении с любой стороны с ненулевым элементом дает ∞. Определим бесконечное произведение

$$(n_1, n_2, \ldots) \quad \mapsto \quad \prod_{j\geq 1} n_j$$

на $\mathbb{N}^\infty$ следующим образом. Если некоторое n_j равно 0, то ему равно и произведение. Иначе, если все, кроме лишь конечного числа множителей n_j, равны 1, то бесконечное произведение есть произведение тех n_j, для которых $n_j > 1$. Во всех остальных случаях бесконечное произведение равно ∞. Тогда $\mathbb{N}^\infty$ есть полное звезда-омега-полукольцо, где * и $^\omega$ определены, как ранее.

Пусть Σ — алфавит. Полукольцо $A = \mathbb{N}^\infty\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ всех степенных рядов Σ^* с коэффициентами в $\mathbb{N}^\infty$ есть полное и непрерывное полукольцо. Пусть теперь $V = \mathbb{N}^\infty\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle$ — совокупность всех формальных степенных рядов над Σ^ω с коэффициентами в $\mathbb{N}^\infty$. Таким образом, элементы из V являются формальными суммами вида

$$s \quad = \quad \sum_{w\in\Sigma^\omega} (s, w)w,$$

где каждый коэффициент (s, w) принадлежит $\mathbb{N}^\infty$. Теперь V может быть превращен в A-полумодуль с помощью операции поэлементного сложения и действия $(r, s) \mapsto rs$, определенного посредством

$$(rs, w) \quad = \quad \sum_{u\in\Sigma^*, v\in\Sigma^\omega,\ uv=w} (r, u)(s, v),$$

где бесконечная сумма в правой части существует, так как $\mathbb{N}^\infty$ полно. Также мы можем определить бесконечное призведение, образуя из последовательностей над A ряды в V. Пусть даны $s_1, s_2, \ldots$ в A, определим $\prod_{j\geq 1} s_j$ как ряд r в V, причем

$$(r, w) \quad = \quad \sum_{w=w_1w_2\ldots\in\Sigma^\omega} \prod_{j\geq 1} (s_j, w_j).$$

Тогда (A, V) есть полная и непрерывная пара полукольцо-полумодуль и, таким образом, пара полукольцо-полумодуль Конвея.

Эта построение допускает широкое обобщение. Пусть A — полное звезда-омега-полукольцо. Если Σ — множество, рассмотрим полное полукольцо $A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ и полный моноид $A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle$ всех рядов над Σ^ω с коэффициентами в A, наделенный операцией поэлементного сложения. Если мы определим действие sr элемента $s \in A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ на $r \in A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle$ как

$$(sr, w) \quad = \quad \sum_{w=uv} (s,u)(r,v),$$

то $(A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle, A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle)$ обращается в пару полукольцо-полумодуль. Теперь $A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle$ — полукольцо, и если мы определим операцию бесконечного произведения

$$(s_1, s_2, \ldots) \quad \mapsto \quad \prod_{j\geqslant 1} s_j \in A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle$$

через

$$(\prod_{j\geqslant 1} s_j, w) \quad = \quad \sum_{w=w_1w_2\ldots\in\Sigma^\omega} \prod_{j\geqslant 1} (s_j, w_j),$$

то $(A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle, A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle)$ обращается в полную пару полукольцо-полумодуль, а следовательно, в пару полукольцо-полумодуль Конвея, удовлетворяющую $(a\varepsilon)^\omega = 0$ для всех $a \in A$. Если A — непрерывное полукольцо, то $(A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle, A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle)$ — непрерывная пара полукольцо-полумодуль (см. теорему 5.5). $\square$

Рассмотрим пару полукольцо со звездой-омега-полумодуль (A, V). Согласно Bloom, Esik [5], определим матричную операцию ${}^\omega : A^{n\times n} \to V^{n\times 1}$ на (A, V) следующим образом. Если $n = 0$, то M^ω — единственный элемент V^0, а если $n = 1$, так что $M = (a)$ для некоторого $a \in A$, то $M^\omega = (a^\omega)$. Допустим теперь, что $n > 1$, и запишем M в виде

$$M \quad = \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Тогда

$$M^\omega \quad = \quad \begin{pmatrix} (a+bd^*c)^\omega + (a+bd^*c)^*bd^\omega \\ (d+ca^*b)^\omega + (d+ca^*b)^*ca^\omega \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Вслед за Esik, Kuich [11] определим матричные операции ${}^{\omega_k} : A^{n\times n} \to V^{n\times 1}$, $0 \leqslant k \leqslant n$, следующим образом. Допустим, что $M \in A^{n\times n}$ разбивается на блоки a, b, c, d, как в (1), но здесь a имеет размерность $k \times k$, а d — размерность $(n-k)\times(n-k)$. Тогда

$$M^{\omega_k} \quad = \quad \begin{pmatrix} (a+bd^*c)^\omega \\ d^*c(a+bd^*c)^\omega \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Заметим, что $M^{\omega_0} = 0$ и $M^{\omega_n} = M^\omega$.

Предположим, что (A, V) — пара полукольцо-полумодуль, и рассмотрим $T = A \times V$. Определим на T операции

$$\begin{aligned}(s,u)\cdot(s',v) &= (ss', u+sv),\\ (s,u)+(s',v) &= (s+s', u+v)\end{aligned}$$

и константы $0 = (0,0)$ и $1 = (1,0)$. Наделенное этими операциями и константами, T удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned}(x+y)+z &= x+(y+z), &(4)\\ x+y &= y+x, &(5)\\ x+0 &= x, &(6)\\ (x\cdot y)\cdot z &= x\cdot(y\cdot z), &(7)\\ x\cdot 1 &= x, &(8)\\ 1\cdot x &= x, &(9)\\ (x+y)\cdot z &= (x\cdot z)+(y\cdot z), &(10)\\ 0\cdot x &= 0. &(11)\end{aligned}$$

Elgot [8] определял также унарную операцию ¶ на T: $(s,u)¶ = (s,0)$. Таким образом, ¶ выбирает «первую компоненту» пары (s,u), тогда как умножение на 0 справа выбирает «вторую компоненту», так как $(s,u)\cdot 0 = (0,u)$ для всех $u \in V$. Новая операция удовлетворяет следующим свойствам:

$$\begin{aligned}x¶\cdot(y+z) &= (x¶\cdot y)+(x¶\cdot z), &(12)\\ x &= x¶+(x\cdot 0), &(13)\\ x¶\cdot 0 &= 0, &(14)\\ (x+y)¶ &= x¶+y¶, &(15)\\ (x\cdot y)¶ &= x¶\cdot y¶. &(16)\end{aligned}$$

Заметим, что если V — идемпотент, то выполняется также

$$x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z.$$

Elgot [8] определил *квемикольцо* как алгебраическую структуру T, наделенную указанными выше операциями $\cdot, +, ¶$ и константами $0, 1$, удовлетворяющими тождествам (4)—(11) и (12)—(16). Морфизм квемикольца есть функция, сохраняющая операции и константы. Из аксиом следует, что $x¶¶ = x¶$ для всех x в квемикольце T. Кроме того, $x¶ = x$, если $x \cdot 0 = 0$.

Если T — квемикольцо, то $A = T¶ = \{x¶ \mid x \in T\}$, что легко видеть, является полукольцом. Кроме того, $V = T0 = \{x \cdot 0 \mid x \in T\}$ содержит 0 и замкнуто относительно $+$ и, к тому же, $sx \in V$ для всех $s \in A$ и $x \in V$. Каждый $x \in T$ может быть единственным способом записан в виде суммы элемента из $T¶$ и элемента из $T0$ как $x = x¶ + x \cdot 0$. Иногда мы будем отождествлять $A \times \{0\}$ с A и $\{0\} \times V$ с V. Elgot [8] показал, что T изоморфно квемикольцу $A \times V$, определенному парой полукольцо-полумодуль (A, V).

Предположим теперь, что (A, V) — пара полукольцо со звездой — омега-полумодуль. Определим тогда на $T = A \times V$ *операцию обобщенная звезда*

$$(s, v)^{\otimes} \quad = \quad (s^*, s^{\omega} + s^* v) \tag{17}$$

для всех $(s, v) \in T$. Заметим, что операции звезда и омега могут быть получены из операции обобщенная звезда, так как s^* — первая компонента в $(s, 0)^{\otimes}$, а s^{ω} — вторая. Таким образом,

$$\begin{aligned} (s^*, 0) \quad &= \quad (s, 0)^{\otimes}\P, \\ (0, s^{\omega}) \quad &= \quad (s, 0)^{\otimes} \cdot 0. \end{aligned}$$

Заметим, что при $(s, 0) \in A \times \{0\}$ имеем $(s, 0)^{\otimes} = (s^*, 0) + (0, s^{\omega})$.

Предположим теперь, что T — (абстрактное) квемикольцо, наделенное операцией обобщенная звезда $^{\otimes}$. Как объяснялось выше, T как квемикольцо изоморфно квемикольцу $A \times V$, ассоциированному с парой полукольцо-полумодуль (A, V), где $A = T\P$ и $V = T0$, а изоморфизм установлен отображением $x \mapsto (x\P, x \cdot 0)$. Ясно, что операция обобщенная звезда $^{\otimes} : T \to T$ определена операцией звезда $^* : A \to A$ и операцией омега $^{\omega} : A \to V$ посредством (17) тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$x^{\otimes}\P \quad = \quad (x\P)^{\otimes}\P, \tag{18}$$

$$x^{\otimes} \cdot 0 \quad = \quad (x\P)^{\otimes} \cdot 0 + x^{\otimes}\P \cdot x \cdot 0. \tag{19}$$

Действительно, эти условия, очевидно, являются необходимыми. Обратно, если выполнены (18) и (19), то для любого $x\P \in T\P$ мы можем определить

$$(x\P)^* \quad = \quad (x\P)^{\otimes}\P, \tag{20}$$

$$(x\P)^{\omega} \quad = \quad (x\P)^{\otimes} \cdot 0\,. \tag{21}$$

Отсюда следует, что (17) выполняется. Определение операций звезда и омега было принудительным.

Будем называть квемикольцо, наделенное операцией обобщенная звезда $^{\otimes}$, *обобщенным квемикольцом со звездой.*

3. Пары полукольцо-полумодуль Конвея

На протяжении этой главы (A, V) — пара полукольцо-полумодуль Конвея и $n \geqslant 1$. Индукцией по n докажем, что $(A^{n \times n}, V^n)$ снова является парой полукольцо-полумодуль Конвея. Далее покажем, что тождество «омега-матрицы» выполняется для пар полукольцо-полумодуль Конвея. Результаты излагаются согласно Bloom, Esik [5]. Докажем наши результаты явно, методом, подобным изложенному в части I [1].

Во-первых, докажем, что выполняются некоторые частные случаи тождества «омега-сумма».

Лемма 3.1. *Пусть (A,V) — пара полукольцо-полумодуль Конвея. Тогда для $a,f\in A^{1\times1}$, $g\in A^{1\times n}$, $h\in A^{n\times1}$, $d,i\in A^{n\times n}$ выполняется следующее равенство:*

$$\left(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} f & g\\ h & i\end{pmatrix}\right)^{\omega} = \left(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}^{*}\begin{pmatrix} f & g\\ h & i\end{pmatrix}\right)^{\omega}+ \\ +\left(\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}^{*}\begin{pmatrix} f & g\\ h & i\end{pmatrix}\right)^{*}\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}^{\omega}.$$

Доказательство. Левая и правая части равенства равняются

$$\begin{pmatrix} \alpha^{\omega}+\alpha^{*}g(d+i)^{\omega}\\ \delta^{\omega}+\delta^{*}h(a+f)^{\omega}\end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} \alpha'^{\omega}+\alpha'^{*}a^{*}g(d^{*}i)^{\omega}+\alpha'^{*}a^{\omega}+\alpha'^{*}a^{*}g(d^{*}i)^{*}d^{\omega}\\ \delta'^{\omega}+\delta'^{*}d^{*}h(a^{*}f)^{\omega}+\delta'^{*}d^{*}h(a^{*}f)^{*}a^{\omega}+\delta'^{*}d^{\omega}\end{pmatrix}$$

соответственно, где

$$\alpha=a+f+g(d+i)^{*}h,\qquad \delta=d+i+h(a+f)^{*}g,$$
$$\alpha'=a^{*}f+a^{*}g(d^{*}i)^{*}d^{*}h,\quad \delta'=d^{*}i+d^{*}h(a^{*}f)^{*}a^{*}g.$$

Получим теперь

$$\alpha^{\omega}=(a^{*}f+a^{*}g(d^{*}i)^{*}d^{*}h)^{\omega}+(a^{*}f+a^{*}g(d^{*}i)^{*}d^{*}h)^{*}a^{\omega}=\alpha'^{\omega}+\alpha'^{*}a^{\omega}$$

и

$$\begin{aligned}\alpha^{*}g(d+i)^{\omega} &= (a^{*}f+a^{*}g(d^{*}i)^{*}d^{*}h)^{*}a^{*}g((d^{*}i)^{\omega}+(d^{*}i)^{*}d^{\omega})=\\ &= \alpha'^{*}a^{*}g(d^{*}i)^{\omega}+\alpha'^{*}a^{*}g(d^{*}i)^{*}d^{\omega}.\end{aligned}$$

Подстановка $d\leftrightarrow a$, $i\leftrightarrow f$, $h\leftrightarrow g$ показывает симметрию доказательства для вторых компонент векторов. □

Заметим, что равенства в лемме 3.2 являются частным случаем тождества «омега-сумма», так как $\begin{pmatrix} 0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}^{\omega}=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ c & 0\end{pmatrix}^{\omega}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}$ (для пар полукольцо-полумодуль Конвея, $0^{\omega}=0$).

Лемма 3.2. *Пусть (A,V) — пара полукольцо-полумодуль Конвея. Тогда для $f\in A^{1\times1}$, $b,g\in A^{1\times n}$, $c,h\in A^{n\times1}$, $i\in A^{n\times n}$ выполняются следующие равенства:*

$$\begin{aligned}\left(\begin{pmatrix} 0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} f & g\\ h & i\end{pmatrix}\right)^{\omega} &= \left(\begin{pmatrix} 0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}^{*}\begin{pmatrix} f & g\\ h & i\end{pmatrix}\right)^{\omega},\\ \left(\begin{pmatrix} 0 & 0\\ c & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} f & g\\ h & i\end{pmatrix}\right)^{\omega} &= \left(\begin{pmatrix} 0 & 0\\ c & 0\end{pmatrix}^{*}\begin{pmatrix} f & g\\ h & i\end{pmatrix}\right)^{\omega}.\end{aligned}$$

Доказательство. Левая и правая части 1-го равенства равны

$$\begin{pmatrix} \alpha^\omega + \alpha^*(g+b)i^\omega \\ \delta^\omega + \delta^* h f^\omega \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \alpha'^\omega + \alpha'^*(g+bi)i^\omega \\ \delta'^\omega + \delta'^* h(f+bh)^\omega \end{pmatrix}$$

соответственно, где

$$\begin{array}{ll} \alpha = f + (g+b)i^*h, & \delta = i + hf^*(g+b), \\ \alpha' = f + bh + (g+bi)i^*h, & \delta' = i + h(f+bh)^*(g+bi). \end{array}$$

Получим теперь

$$\begin{array}{l} \alpha' = f + bh + gi^*h + bii^*h = f + gi^*h + bi^*h = \alpha, \\ \alpha'^*(g+bi)i^\omega = \alpha^*(gi^\omega + bii^\omega) = \alpha^*(gi^\omega + bi^\omega) = \alpha^*(g+b)i^\omega, \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \multicolumn{2}{l}{\delta'^\omega + \delta'^* h(f+bh)^\omega =} \\ = & (i + h(f^*bh)^*f^*g + h(f^*bh)^*f^*bi)^\omega + (i + h(f^*bh)^*f^*g + \\ & + h(f^*bh)^*f^*bi)^*h((f^*bh)^\omega + (f^*bh)^*f^\omega) = \\ = & ((hf^*b)^*hf^*g + (hf^*b)^*i)^\omega + ((hf^*b)^*hf^*g + (hf^*b)^*i)^*(hf^*b)^\omega + \\ & + ((hf^*b)^*hf^*g + (hf^*b)^*i)^*(hf^*b)^*hf^\omega = \\ = & (hf^*b + hf^*g + i)^\omega + (hf^*b + hf^*g + i)^*hf^\omega = \delta^\omega + \delta^*hf^\omega. \end{array}$$

Левая и правая части 2-го равенства равны

$$\begin{pmatrix} \alpha^\omega + \alpha^* g i^\omega \\ \delta^\omega + \delta^*(c+h)f^\omega \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \alpha'^\omega + \alpha'^* g(cg+i)^\omega \\ \delta'^\omega + \delta'^*(cf+h)f^\omega \end{pmatrix}$$

соответственно, где

$$\begin{array}{ll} \alpha = f + gi^*(c+h), & \delta = i + (c+h)f^*g, \\ \alpha' = f + g(cg+i)^*(cf+h), & \delta' = cg + i + (cf+h)f^*g. \end{array}$$

Подстановка $f \leftrightarrow i$, $h \leftrightarrow g$, $b \leftrightarrow c$, дающая $\alpha \leftrightarrow \delta$, $\alpha' \leftrightarrow \delta'$, показывает симметрию первому равенству леммы. □

Лемма 3.3. *Пусть (A, V) — пара полукольцо-полумодуль Конвея. Тогда для $b \in A^{1\times n}$, $c \in A^{n\times 1}$ и $M \in A^{(n+1)\times(n+1)}$ выполняется следующее равенство:*

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + M\right)^\omega = \left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^* M\right)^\omega + \left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^* M\right)^* \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^\omega.$$

Доказательство.

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + M\right)^\omega = \left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + M\right)^\omega =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* M\right)^\omega =$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\begin{pmatrix} bc & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & E \end{pmatrix} M \right)^{\omega} = \\
&= \left(\begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & E \end{pmatrix} M \right)^{\omega} = \\
&= \left(\begin{pmatrix} (bc)^* & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (bc)^* & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & E \end{pmatrix} M \right)^{\omega} + \\
&\quad + \left(\begin{pmatrix} (bc)^* & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (bc)^* & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & E \end{pmatrix} M \right)^{*} \times \\
&\quad \times \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{\omega} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (bc)^* & (bc)^*b \\ 0 & E \end{pmatrix} M \right)^{\omega} + \\
&\quad + \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (bc)^* & (bc)^*b \\ 0 & E \end{pmatrix} M \right)^{*} \begin{pmatrix} (bc)^{\omega} \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (bc)^* & (bc)^*b \\ 0 & E \end{pmatrix} M \right)^{\omega} + \\
&\quad + \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (bc)^* & (bc)^*b \\ 0 & E \end{pmatrix} M \right)^{*} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (bc)^{\omega} \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= \left(\begin{pmatrix} (bc)^* & (bc)^*b \\ c(bc)^* & (cb)^* \end{pmatrix} M \right)^{\omega} + \left(\begin{pmatrix} (bc)^* & (bc)^*b \\ c(bc)^* & (cb)^* \end{pmatrix} M \right)^{*} \begin{pmatrix} (bc)^{\omega} \\ (cb)^{\omega} \end{pmatrix} = \\
&= \left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^{*} M \right)^{\omega} + \left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^{*} M \right)^{*} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}^{\omega}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Теорема 3.4. *Пусть (A, V) — пара полукольцо-полумодуль Конвея. Тогда тождество «омега-сумма» выполняется для пары полукольцо со звездой-омега-полумодуль $(A^{(n+1)\times(n+1)}, V^{n+1})$.*

Доказательство. Пусть $a \in A^{1\times1}$, $b \in A^{1\times n}$, $c \in A^{n\times1}$, $d \in A^{n\times n}$, $M \in A^{(n+1)\times(n+1)}$. Получим тогда

$$
\begin{aligned}
&\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + M \right)^{\omega} = \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^{*} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^{*} M \right)^{\omega} + \\
&\quad + \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^{*} \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^{*} M \right)^{*} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^{\omega} = \\
&= \left(\begin{pmatrix} 0 & a^*b \\ d^*c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^* & 0 \\ 0 & d^* \end{pmatrix} M \right)^{\omega} + \\
&\quad + \left(\begin{pmatrix} 0 & a^*b \\ d^*c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^* & 0 \\ 0 & d^* \end{pmatrix} M \right)^{*} \begin{pmatrix} a^{\omega} \\ d^{\omega} \end{pmatrix} = \\
&= \left(\begin{pmatrix} 0 & a^*b \\ d^*c & 0 \end{pmatrix}^{*} \begin{pmatrix} a^* & 0 \\ 0 & d^* \end{pmatrix} M \right)^{\omega} + \\
&\quad + \left(\begin{pmatrix} 0 & a^*b \\ d^*c & 0 \end{pmatrix}^{*} \begin{pmatrix} a^* & 0 \\ 0 & d^* \end{pmatrix} M \right)^{*} \begin{pmatrix} 0 & a^*b \\ d^*c & 0 \end{pmatrix}^{\omega} +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & a^*b \\ d^*c & 0 \end{array}\right)^* \left(\begin{array}{cc} a^* & 0 \\ 0 & d^* \end{array}\right) M\right)^* \left(\begin{array}{cc} 0 & a^*b \\ d^*c & 0 \end{array}\right)^* \left(\begin{array}{c} a^\omega \\ d^\omega \end{array}\right) = \\
= \quad & \left(\left(\begin{array}{cc} (a^*bd^*c)^*a^* & a^*b(d^*ca^*b)^*d^* \\ d^*c(a^*bd^*c)^*a^* & (d^*ca^*b)^*d^* \end{array}\right) M\right)^\omega + \\
&+\left(\left(\begin{array}{cc} (a^*bd^*c)^*a^* & a^*b(d^*ca^*b)^*d^* \\ d^*c(a^*bd^*c)^*a^* & (d^*ca^*b)^*d^* \end{array}\right) M\right)^* \left(\begin{array}{c} (a^*bd^*c)^\omega \\ (d^*ca^*b)^\omega \end{array}\right) + \\
&+\left(\left(\begin{array}{cc} (a^*bd^*c)^*a^* & a^*b(d^*ca^*b)^*d^* \\ d^*c(a^*bd^*c)^*a^* & (d^*ca^*b)^*d^* \end{array}\right) M\right)^* \times \\
&\times \left(\begin{array}{cc} (a^*bd^*c)^* & a^*b(d^*ca^*b)^* \\ d^*c(a^*bd^*c)^* & (d^*ca^*b)^* \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} a^\omega \\ d^\omega \end{array}\right) = \\
= \quad & \left(\left(\begin{array}{cc} (a+bd^*c)^* & a^*b(d+ca^*b)^* \\ d^*c(a+bd^*c)^* & (d+ca^*b)^* \end{array}\right) M\right)^\omega + \\
&+\left(\left(\begin{array}{cc} (a+bd^*c)^* & a^*b(d+ca^*b)^* \\ d^*c(a+bd^*c)^* & (d+ca^*b)^* \end{array}\right) M\right)^* \times \\
&\times \left(\begin{array}{c} (a^*bd^*c)^\omega + (a^*bd^*c)^*a^\omega + a^*b(d^*ca^*b)^*d^\omega \\ (d^*ca^*b)^\omega + d^*c(a^*bd^*c)^*a^\omega + (d^*ca^*b)^*d^\omega \end{array}\right) = \\
= \quad & \left(\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)^* M\right)^\omega + \left(\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)^* M\right)^* \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)^\omega .
\end{aligned}
$$

$\square$

Во-вторых, докажем, что выполняются некоторые частные случаи тождества «омега-произведение».

Лемма 3.5. *Пусть (A, V) — пара полукольцо-полумодуль Конвея. Тогда для $a, f \in A^{1\times 1}$, $b \in A^{1\times n}$, $c \in A^{n\times 1}$, $d \in A^{n\times n}$ выполняется следующее равенство:*

$$
\left(\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} f & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)\right)^\omega = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\left(\begin{array}{cc} f & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\right)^\omega .
$$

Доказательство. Левая и правая части равенства равняются

$$
\left(\begin{array}{cc} af & 0 \\ cf & 0 \end{array}\right)^\omega = \left(\begin{array}{c} (af)^\omega \\ cf(af)^\omega \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} (af)^\omega \\ c(fa)^\omega \end{array}\right)
$$

и

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} fa & fb \\ 0 & 0 \end{array}\right)^\omega &= \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} (fa)^\omega \\ 0 \end{array}\right) = \\
= \left(\begin{array}{c} a(fa)^\omega \\ c(fa)^\omega \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{c} (af)^\omega \\ c(fa)^\omega \end{array}\right)
\end{aligned}
$$

соответственно. $\square$

Лемма 3.6. *Пусть (A, V) — пара полукольцо-полумодуль Конвея. Тогда для $a, s \in A^{1\times 1}$, $b, t \in A^{1\times n}$, $c, u, h \in A^{n\times 1}$, $d, v \in A^{n\times n}$ выполняется следующее равенство:*

$$\left(\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} s & t \\ u & v \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ h & 0 \end{array}\right)\right)^{\omega} = \\ = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\left(\begin{array}{cc} s & t \\ u & v \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ h & 0 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\right)^{\omega}.$$

Доказательство. Левая часть равенства равняется

$$\left(\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} th & 0 \\ vh & 0 \end{array}\right)\right)^{\omega} = \left(\begin{array}{cc} ath+bvh & 0 \\ cth+dvh & 0 \end{array}\right)^{\omega} = \\ = \left(\begin{array}{c} (ath+bvh)^{\omega} \\ (cth+dvh)(ath+bvh)^{\omega} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} t(hat+hbv)^{\omega} \\ v(hat+hbv)^{\omega} \end{array}\right).$$

Правая часть равенства без первого сомножителя равняется

$$\left(\begin{array}{cc} tha & thb \\ vha & vhb \end{array}\right)^{\omega} = \\ = \left(\begin{array}{c} (tha+thb(vhb)^*vha)^{\omega} + (tha+thb(vhb)^*vha)^*thb(vhb)^{\omega} \\ (vhb+vha(tha)^*thb)^{\omega} + (vhb+vha(tha)^*thb)^*vha(tha)^{\omega} \end{array}\right) = \\ = \left(\begin{array}{c} (t(hbv)^*ha)^{\omega} + (t(hbv)^*ha)^*thb(vhb)^{\omega} \\ (v(hat)^*hb)^{\omega} + (v(hat)^*hb)^*vha(tha)^{\omega} \end{array}\right) = \\ = \left(\begin{array}{c} t(hbv+hat)^{\omega} \\ v(hat+hbv)^{\omega} \end{array}\right).$$

□

Лемма 3.7. *Пусть (A, V) — пара полукольцо-полумодуль Конвея. Тогда для $a, s \in A^{1\times 1}$, $b, t \in A^{1\times n}$, $c, u \in A^{n\times 1}$, $d, v, i \in A^{n\times n}$ выполняется следующее равенство:*

$$\left(\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} s & t \\ u & v \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & i \end{array}\right)\right)^{\omega} = \\ = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\left(\begin{array}{cc} s & t \\ u & v \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & i \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\right)^{\omega}.$$

Доказательство. Левая часть равенства равняется

$$\left(\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 0 & ti \\ 0 & vi \end{array}\right)\right)^{\omega} = \left(\begin{array}{cc} 0 & ati+bvi \\ 0 & cti+dvi \end{array}\right)^{\omega} = \\ = \left(\begin{array}{c} (ati+bvi)(cti+dvi)^{\omega} \\ (cti+dvi)^{\omega} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} t(ict+idv)^{\omega} \\ v(ict+idv)^{\omega} \end{array}\right).$$

Правая часть равенства равняется

$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\left(\begin{array}{cc} 0 & ti \\ 0 & vi \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\right)^{\omega} = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} tic & tid \\ vic & vid \end{array}\right)^{\omega}.$$

Подстановка $i \leftrightarrow h$, $a \leftrightarrow c$, $b \leftrightarrow d$ показывает для второго матричного множителя симметрию с равенством леммы 3.6. □

Лемма 3.8. *Пусть (A, V) — пара полукольцо-полумодуль Конвея. Тогда для $a, s \in A^{1\times 1}$, $b, g, t \in A^{1\times n}$, $c, u \in A^{n\times 1}$, $d, v \in A^{n\times n}$ выполняется следующее равенство:*

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^{\omega} =$$
$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)^{\omega}.$$

Доказательство. Левая и правая части равенства равняются

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & sg \\ 0 & ug \end{pmatrix}\right)^{\omega}$$

и

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 0 & sg \\ 0 & ug \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)^{\omega},$$

соответственно. Подстановка $s \leftrightarrow t$, $g \leftrightarrow i$, $u \leftrightarrow v$ показывает симметрию равнству леммы 3.7. □

Лемма 3.9. *Пусть (A, V) — пара полукольцо-полумодуль Конвея. Тогда для $M, M' \in A^{(n+1)\times(n+1)}$, и $g \in A^{1\times n}$, $h \in A^{n\times 1}$ выполняется следующее равенство:*

$$\left(MM'\begin{pmatrix} 0 & g \\ h & 0 \end{pmatrix}\right)^{\omega} = M\left(M'\begin{pmatrix} 0 & g \\ h & 0 \end{pmatrix}M\right)^{\omega}.$$

Доказательство.

$$\left(MM'\begin{pmatrix} 0 & g \\ h & 0 \end{pmatrix}\right)^{\omega} = \left(MM'\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + MM'\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h & 0 \end{pmatrix}\right)^{\omega} =$$
$$= \left(\left(MM'\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^{*} MM'\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h & 0 \end{pmatrix}\right)^{\omega} +$$
$$+ \left(\left(MM'\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^{*} MM'\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h & 0 \end{pmatrix}\right)^{*}\left(MM'\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^{\omega} =$$
$$= \left(M\left(M'\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}M\right)^{*} M'\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h & 0 \end{pmatrix}\right)^{\omega} +$$
$$+ \left(M\left(M'\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}M\right)^{*} M'\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h & 0 \end{pmatrix}\right)^{*} M\left(M'\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}M\right)^{\omega} =$$
$$= M\left(\left(M'\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}M\right)^{*} M'\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h & 0 \end{pmatrix}M\right)^{\omega} +$$
$$+ M\left(\left(M'\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}M\right)^{*} M'\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h & 0 \end{pmatrix}M\right)^{*}\left(M'\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}M\right)^{\omega} =$$
$$= M\left(M'\begin{pmatrix} 0 & g \\ 0 & 0 \end{pmatrix}M + M'\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h & 0 \end{pmatrix}M\right)^{\omega} = M\left(M'\begin{pmatrix} 0 & g \\ h & 0 \end{pmatrix}M\right)^{\omega}.$$

□

Лемма 3.10. *Пусть (A,V) — пара полукольцо-полумодуль Конвея. Тогда для $M,M' \in A^{(n+1)\times(n+1)}$, и $f \in A^{1\times 1}$, $i \in A^{n\times n}$ выполняется следующее равенство:*

$$\left(M\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right)^{\omega} = M\left(\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}M\right)^{\omega}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\left(M\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right)^{\omega} &= \left(M\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right)^{\omega} = \\
= \ & \left(\left(M\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^{*} M\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right)^{\omega} + \\
& + \left(\left(M\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^{*} M\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right)^{*}\left(M\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)^{\omega} = \\
= \ & \left(M\left(\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}M\right)^{*}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right)^{\omega} + \\
& + \left(M\left(\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}M\right)^{*}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right)^{*} M\left(\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}M\right)^{\omega} = \\
= \ & M\left(\left(\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}M\right)^{*}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}M\right)^{\omega} + \\
& + M\left(\left(\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}M\right)^{*}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}M\right)^{*}\left(\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}M\right)^{\omega} = \\
= \ & M\left(\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}M + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}M\right)^{\omega} = M\left(\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}M\right)^{\omega}.
\end{aligned}$$

□

Теорема 3.11. *Пусть (A,V) – пара полукольцо-полумодуль Конвея. Тогда тождество «омега-произведение» выполняется для пары полукольцо со звездой-омега-полумодуль $(A^{(n+1)\times(n+1)}, V^{n+1})$.*

Доказательство. Пусть $M \in A^{(n+1)\times(n+1)}$ и $f \in A^{1\times 1}$, $g \in A^{1\times n}$, $h \in A^{n\times 1}$, $i \in A^{n\times n}$. Тогда докажем, что выполняется равенство

$$\left(M\begin{pmatrix} f & g \\ h & i \end{pmatrix}\right)^{\omega} \ = \ M\left(\begin{pmatrix} f & g \\ h & i \end{pmatrix}M\right)^{\omega}.$$

Получим:

$$\begin{aligned}
\left(M\begin{pmatrix} f & g \\ h & i \end{pmatrix}\right)^{\omega} &= \left(M\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} 0 & g \\ h & 0 \end{pmatrix}\right)^{\omega} = \\
= \ & \left(\left(M\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right)^{*} M\begin{pmatrix} 0 & g \\ h & 0 \end{pmatrix}\right)^{\omega} +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\left(M\begin{pmatrix} f & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\right)^* M\begin{pmatrix} 0 & g\\ h & 0\end{pmatrix}\right)^* \left(M\begin{pmatrix} f & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\right)^\omega =\\
=\ &\left(M\left(\begin{pmatrix} f & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}M\right)^* \begin{pmatrix} 0 & g\\ h & 0\end{pmatrix}\right)^\omega +\\
&+\left(M\left(\begin{pmatrix} f & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}M\right)^* \begin{pmatrix} 0 & g\\ h & 0\end{pmatrix}\right)^* M\left(\begin{pmatrix} f & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}M\right)^\omega =\\
=\ &M\left(\left(\begin{pmatrix} f & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}M\right)^* \begin{pmatrix} 0 & g\\ h & 0\end{pmatrix}M\right)^\omega +\\
&+M\left(\left(\begin{pmatrix} f & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}M\right)^* \begin{pmatrix} 0 & g\\ h & 0\end{pmatrix}M\right)^* \left(\begin{pmatrix} f & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}M\right)^\omega =\\
=\ &M\left(\begin{pmatrix} f & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}M + \begin{pmatrix} 0 & g\\ h & 0\end{pmatrix}M\right)^\omega = M\left(\begin{pmatrix} f & g\\ h & i\end{pmatrix}M\right)^\omega .
\end{aligned}
$$

□

Следствие 3.12 (Bloom, Esik [5]). *Если (A, V) — пара полукольцо-полумодуль Конвея, то для $n \geqslant 0$ пара $(A^{(n+1)\times(n+1)}, V^{n+1})$ снова является парой полукольцо-полумодуль Конвея.*

Докажем теперь тождество «омега-матрица».

Теорема 3.13 (Bloom, Esik [5]). *Пусть (A, V) — пара полукольцо-полумодуль Конвея. Тогда тождество «омега-матрица» выполняется для пары полукольцо со звездой-омега-полумодуль $(A^{(n+1)\times(n+1)}, V^{n+1})$.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству тождества для звезды матрицы в части I [1], теорема 2.18, и проводится индукцией по размерности матрицы. Для 2×2-матриц проблем не возникает. Пусть $M \in A^{n\times n}$, $n \geqslant 3$, задаем разбиение M на девять блоков размерностями $f \in A^{n_1\times n_1}$, $g \in A^{n_1\times n_2}$, $h \in A^{n_1\times n_3}$, $i \in A^{n_2\times n_1}$, $a \in A^{n_2\times n_2}$, $b \in A^{n_2\times n_3}$, $j \in A^{n_3\times n_1}$, $c \in A^{n_3\times n_2}$, $d \in A^{n_3\times n_3}$:

$$
M = \begin{pmatrix} f & g & h\\ i & a & b\\ j & c & d\end{pmatrix}
$$

Теперь доказательство сводится к демонстрации того, что если мы вычислим $^\omega$ от матриц

$$
M = \left(\begin{array}{c|cc} f & g & h\\ \hline i & a & b\\ j & c & d\end{array}\right) \quad \text{и} \quad M' = \left(\begin{array}{cc|c} f & g & h\\ i & a & b\\ \hline j & c & d\end{array}\right)
$$

описанным способом, то получим одинаковый результат. Следовательно, нам нужно проверить три равенства от девяти переменных.

(i) Вычислим сначала M^ω. Обозначим блоки матрицы M^ω через $(M^\omega)_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Получим

$$\begin{aligned}
(M^\omega)_1 &= \left(f + (g\ h)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\right)^\omega + \\
&\quad + \left(f + (g\ h)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\right)^* (g\ h)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\omega = \\
&= \left(f + (g\ h)\begin{pmatrix} (a+bd^*c)^* & a^*b(d+ca^*b)^* \\ d^*c(a+bd^*c)^* & (d+ca^*b)^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\right)^\omega + \\
&\quad + \left(f + (g\ h)\begin{pmatrix} (a+bd^*c)^* & a^*b(d+ca^*b)^* \\ d^*c(a+bd^*c)^* & (d+ca^*b)^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}\right)^* \times \\
&\quad \times (g\ h)\begin{pmatrix} (a+bd^*c)^\omega + (a+bd^*c)^*bd^\omega \\ (d+ca^*b)^\omega + (d+ca^*b)^*ca^\omega \end{pmatrix} = \\
&= \alpha^\omega + \alpha^*(g(a+bd^*c)^\omega + g(a+bd^*c)^*bd^\omega + \\
&\quad + h(d+ca^*b)^\omega + h(d+ca^*b)^*ca^\omega)\,,
\end{aligned}$$

где $\alpha = f + g(a+bd^*c)^*i + ga^*b(d+ca^*b)^*j + hd^*c(a+bd^*c)^*i + {}$ $+h(d+ca^*b)^*j$,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} (M^\omega)_2 \\ (M^\omega)_3 \end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} f^*(g\ h)\right)^\omega + \\
&\quad + \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} f^*(g\ h)\right)^* \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} f^\omega = \\
&= \begin{pmatrix} a+if^*g & b+if^*h \\ c+jf^*g & d+jf^*h \end{pmatrix}^\omega + \\
&\quad + \begin{pmatrix} a+if^*g & b+if^*h \\ c+jf^*g & d+jf^*h \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} if^\omega \\ jf^\omega \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \beta^\omega + \beta^*(b+if^*h)(d+jf^*h)^\omega \\ \gamma^\omega + \gamma^*(c+jf^*g)(a+if^*g)^\omega \end{pmatrix} + \\
&\quad + \begin{pmatrix} \beta^*if^\omega + \beta^*(b+if^*h)(d+jf^*h)^*jf^\omega \\ \gamma^*(c+jf^*g)(a+if^*g)^*if^\omega + \gamma^*jf^\omega \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\beta &= a + if^*g + (b+if^*h)(d+jf^*h)^*(c+jf^*g), \\
\gamma &= d + jf^*h + (c+jf^*g)(a+if^*g)^*(b+if^*h)\,.
\end{aligned}$$

(ii) Вычислим теперь M'^ω. Обозначим блоки матрицы M'^ω через $(M'^\omega)_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Получим

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} (M'^\omega)_1 \\ (M'^\omega)_2 \end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix} f & g \\ i & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} d^*(j\ c)\right)^\omega + \\
&\quad + \left(\begin{pmatrix} f & g \\ i & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} d^*(j\ c)\right)^* \begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix} d^\omega =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} f+hd^*j & g+hd^*c \\ i+bd^*j & a+bd^*c \end{pmatrix}^{\omega} + \\
&\quad + \begin{pmatrix} f+hd^*j & g+hd^*c \\ i+bd^*j & a+bd^*c \end{pmatrix}^{*} \begin{pmatrix} hd^{\omega} \\ bd^{\omega} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \delta^{\omega}+\delta^*(g+hd^*c)(a+bd^*c)^{\omega} \\ \eta^{\omega}+\eta^*(i+bd^*j)(f+hd^*j)^{\omega} \end{pmatrix} + \\
&\quad + \begin{pmatrix} \delta^*hd^{\omega}+\delta^*(g+hd^*c)(a+bd^*c)^*bd^{\omega} \\ \eta^*(i+bd^*j)(f+hd^*j)^*hd^{\omega}+\eta^*bd^{\omega} \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\delta &= f+hd^*j+(g+hd^*c)(a+bd^*c)^*(i+bd^*j), \\
\eta &= a+bd^*c+(i+bd^*j)(f+hd^*j)^*(g+hd^*c).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(M'^{\omega})_3 &= \left(d+(j\ c)\begin{pmatrix} f & g \\ i & a \end{pmatrix}^{*}\begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix}\right)^{\omega} + \\
&\quad + \left(d+(j\ c)\begin{pmatrix} f & g \\ i & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix}\right)^{*}(j\ c)\begin{pmatrix} f & g \\ i & a \end{pmatrix}^{\omega} = \\
&= \left(d+(j\ c)\begin{pmatrix} (f+ga^*i)^* & f^*g(a+if^*g)^* \\ a^*i(f+ga^*i)^* & (a+if^*g)^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix}\right)^{\omega} + \\
&\quad + \left(d+(j\ c)\begin{pmatrix} (f+ga^*i)^* & f^*g(a+if^*g)^* \\ a^*i(f+ga^*i)^* & (a+if^*g)^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ b \end{pmatrix}\right)^{*} \times \\
&\quad \times (j\ c)\begin{pmatrix} (f+ga^*i)^{\omega}+(f+ga^*i)^*ga^{\omega} \\ (a+if^*g)^{\omega}+(a+if^*g)^*if^{\omega} \end{pmatrix} = \\
&= \chi^{\omega}+\chi^*(j(f+ga^*i)^{\omega}+j(f+ga^*i)^*ga^{\omega}+ \\
&\quad +c(a+if^*g)^{\omega}+c(a+if^*g)^*if^{\omega}),
\end{aligned}
$$

где $\chi = d+j(f+ga^*i)^*h+jf^*g(a+if^*g)^*b+ca^*i(f+ga^*i)^*h+$ $+c(a+if^*g)^*b$.

(iii) Покажем теперь справедливость равенств $(M^{\omega})_i = (M'^{\omega})_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Получим $\alpha = \delta$ по лемме 2.16 части I [1]. Следовательно, для доказательства равенства $(M^{\omega})_1 = (M'^{\omega})_1$ нам нужно показать, что следующие два выражения равны:

$$g(a+bd^*c)^{\omega}+g(a+bd^*c)^*bd^{\omega}+h(d+ca^*b)^{\omega}+h(d+ca^*b)^*ca^{\omega},$$

$$(g+hd^*c)(a+bd^*c)^{\omega}+hd^{\omega}+(g+hd^*c)(a+bd^*c)^*bd^{\omega}.$$

В обоих выражениях встречаются члены $g(a+bd^*c)^{\omega}$ и $g(a+bd^*c)^*bd^{\omega}$. Первое выражение без этих членов дает

$$h(d^*ca^*b)^{\omega}+h(d^*ca^*b)^*d^{\omega}+h(d^*ca^*b)^*d^*ca^{\omega},$$

тогда как второе, без этих членов, дает

$$hd^*c(a^*bd^*c)^{\omega}+hd^*c(a^*bd^*c)^*a^{\omega}+hd^*c(a^*bd^*c)^*a^*bd^{\omega}+hd^{\omega}.$$

Легко проверить, что первые члены обоих выражений совпадают, третий член в первом и второй член во втором выражении равны, второй член в первом и сумма третьего и четвертого членов во втором выражении совпадают. Следовательно, $(M^\omega)_1 = (M'^\omega)_1$.

Имеем $\beta = \eta$ по лемме 2.17 части I [1]. Следовательно, для доказательства того, что $(M^\omega)_2 = (M'^\omega)_2$, нам нужно показать равенство

$$\begin{aligned}(b + if^*h)(d + jf^*h)^\omega + if^\omega + (b + if^*h)(d + jf^*h)^* jf^\omega =\\ = \ (i + bd^*j)(f + hd^*j)^\omega + (i + bd^*j)(f + hd^*j)^* hd^\omega + bd^\omega .\end{aligned}$$

Левая часть дает $b(d^*jf^*h)^\omega + if^*h(d^*jf^*h)^\omega + b(d^*jf^*h)^*d^\omega + {}+if^*h(d^*jf^*h)^*d^\omega + if^\omega + b(d^*jf^*h)^*d^*jf^\omega + if^*h(d^*jf^*h)^*d^*jf^\omega$, тогда как правая часть дает $i(f^*hd^*j)^\omega + bd^*j(f^*hd^*j)^\omega + i(f^*hd^*j)^*f^\omega + {}+bd^*j(f^*hd^*j)^*f^\omega + i(f^*hd^*j)^*f^*hd^\omega + bd^*j(f^*hd^*j)^*f^*hd^\omega + bd^\omega$. Обозначим семь членов левой (соответственно правой) части слева направо как $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7$ (соответственно $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7$). Легко проверяются следующие равенства: $L_1 = R_2$, $L_2 = R_1$, $L_3 = R_6 + R_7$, $L_4 = R_5$, $L_5 + L_7 = R_3$, $L_6 = R_4$. Если мы выполним подстановку $f \leftrightarrow d$, $h \leftrightarrow j$, $g \leftrightarrow c$, $i \leftrightarrow b$ в равенство $(M^\omega)_1 = (M'^\omega)_1$, то получим равенство $(M'^\omega)_3 = (M^\omega)_3$. Следовательно, наша теорема доказана. $\square$

Исправление

В части I [1] теорему 2.13 сформулируем в более общем виде. Это закроет пробел в доказательстве следствия 2.15 в части I [1]. Новая теорема 2.13 и ее доказательство имеют теперь следующий вид.

Теорема 2.13. *Пусть A – полукольцо Конвея, $M \in A^{(k+1)\times(m+1)}$ и $M' \in A^{(m+1)\times(k+1)}$, $k, m \geqslant 0$. Тогда $(MM')^*M = M(M'M)^*$.*

Доказательство. Рассмотрим три случая: (i) $k = m = n$, (ii) $k = n > m$, (iii) $m = n > k$. Во всех трех случаях доказательство проведем индукцией по n.

(i) Возьмем доказательство теоремы 2.13 части I [1].

(ii) После разбиения M и M' на блоки

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad M' = \begin{pmatrix} f & g \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $a, f \in A^{(m+1)\times(m+1)}$, $b \in A^{(n-m)\times(m+1)}$ и $g \in A^{(m+1)\times(n-m)}$, имеем

$$\begin{aligned}(MM')^*M &= \begin{pmatrix} af & ag \\ bf & bg \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} =\\ &= \begin{pmatrix} (af + ag(bg)^*bf)^*(a + ag(bg)^*b) & 0 \\ (bg + bf(af)^*ag)^*(bf(af)^*a + b) & 0 \end{pmatrix} =\\ &= \begin{pmatrix} (a(gb)^*f)^*a(gb)^* & 0 \\ (b(fa)^*g)^*b(fa)^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(gb + fa)^* & 0 \\ b(fa + gb)^* & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$M(M'M)^* = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} fa+gb & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a(fa+gb)^* & 0 \\ b(fa+gb)^* & 0 \end{pmatrix}.$$

(iii) После разбиения M и M' на блоки

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{и} \qquad M' = \begin{pmatrix} f & 0 \\ h & 0 \end{pmatrix},$$

где $a, f \in A^{(k+1)\times(k+1)}$, $c \in A^{(k+1)\times(n-k)}$ и $h \in A^{(n-k)\times(k+1)}$, получим

$$\begin{aligned} (MM')^*M &= \begin{pmatrix} af+ch & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (af+ch)^*a & (af+ch)^*c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(M'M)^* &= \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} fa & fc \\ ha & hc \end{pmatrix}^* = \\ &= \begin{pmatrix} (a+c(hc)^*ha)(fa+fc(hc)^*ha)^* & (a(fa)^*fc+c)(hc+ha(fa)^*fc)^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (ch)^*a(f(ch)^*a)^* & (af)^*c(h(af)^*c)^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (ch+af)^*a & (af+ch)^*c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

4. Конечные автоматы над квемикольцами и теорема Клини

Рассмотрим конечные автоматы над квемикольцами и докажем теорему Клини. (A, V) обозначает пару полукольцо-полумодуль Конвея, а T — обобщенное квемикольцо со звездой $A \times V$. Кроме того, A' — это подмножество в A.

Конечный A'-автомат (*над квемикольцом T*)

$$\mathfrak{A} = (n, I, M, P, k)$$

задается следующими компонентами:

(i) конечное *множество состояний* $\{1, \ldots, n\}$, $n \geqslant 1$;

(ii) *матрица переходов* $M \in (A' \cup \{0,1\})^{n\times n}$;

(iii) *вектор начальных состояний* $I \in (A' \cup \{0,1\})^{1\times n}$;

(iv) *вектор конечных состояний* $P \in (A' \cup \{0,1\})^{n\times 1}$;

(v) *множество повторяющихся состояний* $\{1, \ldots, k\}$, $k \geqslant 0$.

Поведение автомата $\mathfrak{A}$ является элементом в T и определяется как

$$||\mathfrak{A}|| = IM^*P + IM^{\omega_k}\,.$$

Если $\mathfrak{A} = (n, (i_1\ i_2), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, k)$, где $i_1 \in (A' \cup \{0,1\})^{1\times k}$, $i_2 \in (A' \cup \{0,1\})^{1\times(n-k)}$, $a \in (A' \cup \{0,1\})^{k\times k}$, $b \in (A' \cup \{0,1\})^{k\times(n-k)}$, $c \in (A' \cup \{0,1\})^{(n-k)\times k}$, $d \in (A' \cup \{0,1\})^{(n-k)\times(n-k)}$, $p_1 \in (A' \cup \{0,1\})^{k\times 1}$, $p_2 \in (A' \cup \{0,1\})^{(n-k)\times 1}$, то мы будем записывать также

$$\mathfrak{A} = (n; i_1, i_2; a, b, c, d; p_1, p_2; k)\,.$$

Пусть теперь (A, V) — полная пара полукольцо-полумодуль. Рассмотрим конечный A'-автомат $\mathfrak{A} = (n; i_1, i_2; a, b, c, d; p_1, p_2; k)$, матрицу $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, причем

$$M^{\omega_k} = \begin{pmatrix} (a^*bd^*c)^\omega + (a^*bd^*c)^*a^\omega \\ cd^*(a^*bd^*c)^\omega + cd^*(a^*bd^*c)^*a^\omega \end{pmatrix}\,,$$

и направленный граф автомата $\mathfrak{A}$ (см. часть I [1], глава 3). В первом слагаемом элементов матрицы M^{ω_k} блоки b и c встречаются бесконечно часто, т. е. i-я строка первого слагаемого является суммой весов всех бесконечных путей, начинающихся в состоянии i и проходящих бесконечно часто через повторяющиеся состояния в $\{1, \ldots, k\}$ и неповторяющиеся состояния в $\{k+1, \ldots, n\}$. Во втором слагаемом элементов M^{ω_k} блок a встречается бесконечно часто, а блоки b и c — лишь конечное число раз, т. е. i-я строка второго слагаемого является суммой весов всех бесконечных путей, начинающихся в состоянии i и проходящих бесконечно часто через повторяющиеся состояния в $\{1, \ldots, k\}$ и лишь конечное число раз через неповторяющиеся состояния в $\{k+1, \ldots, n\}$. Следовательно, i-я строка первого и второго слагаемых элементов матрицы M^{ω_k} состоит из сумм весов непересекающихся множеств бесконечных путей. Кроме того, каждый вес бесконечного пути подсчитан не менее одного раза. Следовательно, имеем следующий результат.

Теорема 4.1. *Если (A, V) — полная пара полукольцо-полумодуль и $\mathfrak{A}$ — конечный A'-автомат, то $||\mathfrak{A}|| = F + I$, где F — сумма весов всех конечных путей из начального состояния в конечное состояние, умноженная на начальный и конечный веса этих состояний, I — сумма весов всех бесконечных путей, начинающихся в начальном состоянии, проходящих бесконечно часто через повторяющиеся состояния, и умноженная на начальный вес этого начального состояния.*

По определению ω-$\mathfrak{Rat}(A')$ — обобщенное квемикольцо со звездой, порожденное множеством A'.

Докажем теорему Клини. Пусть $a \in A \times V$. Тогда $a \in \omega$-$\mathfrak{Rat}(A')$ тогда и только тогда, когда a — поведение конечного A'-автомата. Для достижения этого результата потребуется несколько теорем и следствий.

Пусть $\mathfrak{A} = (n, I, M, P, k)$ — конечный A'-автомат. Он называется *нормированным*, если:

(i) $n \geqslant 2$ и $k \leqslant n-2$;

(ii) $I_{n-1} = 1$ и $I_j = 0$ для $j \neq n-1$;

(iii) $P_n = 1$ и $P_j = 0$ для $j \neq n$;

(iv) $M_{i,n-1} = 0$ и $M_{n,i} = 0$ для всех $1 \leqslant i \leqslant n$.

Два конечных A'-автомата $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ *эквивалентны* при $||\mathfrak{A}|| = ||\mathfrak{A}'||$.

Теорема 4.2. *Любой конечный A'-автомат $\mathfrak{A} = (n, I, M, P, k)$ эквивалентен нормированному конечному A'-автомату $\mathfrak{A}' = (n+2, I', M', P', k)$.*

Доказательство. Определим $I' = (0\ 1\ 0)$, $M' = \begin{pmatrix} M & 0 & P \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $P' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Пусть теперь $\mathfrak{A} = (n; i_1, i_2; a, b, c, d; p_1, p_2; k)$. Тогда

$$M' = \begin{pmatrix} a & b & 0 & p_1 \\ c & d & 0 & p_2 \\ i_1 & i_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и первые k элементов матрицы M'^{ω_k} равняются

$$\left(a + (b\ 0\ p_1) \begin{pmatrix} d & 0 & p_2 \\ i_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} c \\ i_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^\omega =$$
$$= \left(a + (b\ 0\ p_1) \begin{pmatrix} d^* & 0 & d^*p_2 \\ i_2 d^* & 1 & i_2 d^* p_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ i_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)^\omega = (a + bd^*c)^\omega .$$

Следовательно, последние $n-k+2$ элементов матрицы M'^{ω_k} равны

$$\begin{pmatrix} d & 0 & p_2 \\ i_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} c \\ i_1 \\ 0 \end{pmatrix} (a+bd^*c)^\omega = \begin{pmatrix} d^*c \\ i_2 d^* c + i_1 \\ 0 \end{pmatrix} (a + bd^*c)^\omega,$$

получим $||\mathfrak{A}'|| = I'M'^*P' + I'M'^{\omega_k} = (M'^*)_{n+1,n+2} + (M'^{\omega_k})_{n+1} = IM^*P + (i_2 d^* c + i_1)(a + bd^*c)^\omega = IM^*P + IM^{\omega_k} = ||\mathfrak{A}||$. $\square$

Лемма 4.3. *Если $\mathfrak{A} = (n; i_1, i_2; a, b, c, d; p_1, p_2; k)$ — конечный A'-автомат, то*

$$\begin{aligned} ||\mathfrak{A}|| &= i_1(a+bd^*c)^*(p_1 + bd^*p_2) + i_2 d^* c (a + bd^*c)^*(p_1 + bd^*p_2) + \\ &\quad + i_2 d^* p_2 + i_1 (a + bd^*c)^\omega + i_2 d^* c (a+bd^*c)^\omega . \end{aligned}$$

Доказательство. Имеем

$$
\begin{aligned}
||\mathfrak{A}|| &= (i_1\ i_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + (i_1\ i_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\omega_k} = \\
&= (i_1\ i_2)\begin{pmatrix} (a+bd^*c)^* & (a+bd^*c)^*bd^* \\ d^*c(a+bd^*c)^* & d^*c(a+bd^*c)^*bd^* + d^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \\
&+(i_1\ i_2)\begin{pmatrix} (a+bd^*c)^\omega \\ d^*c(a+bd^*c)^\omega \end{pmatrix} = \\
&= i_1(a+bd^*c)^*p_1 + i_1(a+bd^*c)^*bd^*p_2 + i_2d^*c(a+bd^*c)^*p_1 + \\
&+i_2d^*c(a+bd^*c)^*bd^*p_2 + i_2d^*p_2 + i_1(a+bd^*c)^\omega + \\
&+i_2d^*c(a+bd^*c)^\omega . \square
\end{aligned}
$$

Предположим что $\mathfrak{A} = (n; i_1, i_2; a, b, c, d; f, g; m)$ и $\mathfrak{A}' = (n'; h, i; a', b', c', d'; p_1, p_2; k)$ — конечные A'-автоматы. Определим тогда конечные A'-автоматы $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}'$ как

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' &= (n+n'; (i_1\ h), (i_2\ i); \\
&\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix}; \\
&\begin{pmatrix} f \\ p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ p_2 \end{pmatrix}, m+k)
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}' &= (n+n'; (i_1\ 0), (i_2\ 0); \\
&\begin{pmatrix} a & fh \\ 0 & a' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & fi \\ 0 & b' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & gh \\ 0 & c' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & gi \\ 0 & d' \end{pmatrix}; \\
&\begin{pmatrix} 0 \\ p_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ p_2 \end{pmatrix}, m+k) .
\end{aligned}
$$

Для определения автомата $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}'$ допустим, что либо $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(h\ i) \in (A' \cup \{0,1\})^{n \times n'}$, либо $\mathfrak{A}'$ нормирован. Заметим, что определения автоматов $\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}'$ (и автомата $\mathfrak{A}^{\otimes}$, который определен ниже) обычные, за исключением того что некоторые строки и столбцы переставлены. Эти перестановки необходимы, так как множеством повторяющихся состояний конечного A'-автомата всегда является $\{1, \ldots, k\}$.

Теорема 4.4. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ — конечные A'-автоматы. Тогда $||\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'|| = ||\mathfrak{A}|| + ||\mathfrak{A}'||$ и $||\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}'|| = ||\mathfrak{A}|| \cdot ||\mathfrak{A}'||$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ определены как и ранее. Покажем сначала, что $||\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'|| = ||\mathfrak{A}|| + ||\mathfrak{A}'||$ и вычислим $||\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'|| \cdot 0$. Матрица переходов автомата $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}'$ задана как

$$
M = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a' & 0 & b' \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c' & 0 & d' \end{pmatrix} .
$$

Вычислим теперь первые $m+k$ элементов матрицы $M^{\omega_{m+k}}$. Этот вектор-столбец размерности $m+k$ задается как

$$\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}\right)^\omega =$$

$$= \begin{pmatrix} a+bd^*c & 0 \\ 0 & a'+b'd'^*c' \end{pmatrix}^\omega = \begin{pmatrix} (a+bd^*c)^\omega \\ (a'+b'd'^*c')^\omega \end{pmatrix}.$$

Последние $n+n'-(m+k)$ элементов матрицы $M^{\omega_{m+k}}$ задаются произведением матрицы

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d' \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^*c & 0 \\ 0 & d'^*c' \end{pmatrix}$$

с вектор-столбцом, вычисленным выше. Следовательно, получаем по лемме 4.3

$$||\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'||\cdot 0 = (i_1\ h\ i_2\ i)M^{\omega_{m+k}} = i_1(a+bd^*c)^\omega + h(a'+b'd'^*c')^\omega +$$
$$i_2 d^*c(a+bd^*c)^\omega + id'^*c'^*(a'+b'd'^*c')^\omega = (||\mathfrak{A}||+||\mathfrak{A}'||)\cdot 0\,.$$

Вычислим теперь $||\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'||\P$. Если в матрице переходов M автомата $\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'$ переставить $m+1,\ldots,m+k$ строки и столбцы с $m+k+1,\ldots,n+k$ строками и столбцами и то же самое сделать с начальным и конечным векторами, то по тождеству «звезда перестановки» получим (см. Conway [7], Esik, Kuich [9])

$$||\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'||\P = (i_1\ i_2\ h\ i)\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' & d' \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} f \\ g \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (i_1\ i_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} + (h\ i)\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (||\mathfrak{A}||+||\mathfrak{A}'||)\P\,.$$

Следовательно, $||\mathfrak{A}+\mathfrak{A}'|| = ||\mathfrak{A}||+||\mathfrak{A}'||$.

Покажем теперь, что $||\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}'|| = ||\mathfrak{A}||\cdot||\mathfrak{A}'||$ и вычислим $||\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}'||\cdot 0$. Матрица переходов автомата $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}'$ задается как

$$M = \begin{pmatrix} a & fh & b & fi \\ 0 & a' & 0 & b' \\ c & gh & d & gi \\ 0 & c' & 0 & d' \end{pmatrix}.$$

Вычислим теперь первые $m+k$ элементов матрицы $M^{\omega_{m+k}}$. Этот вектор-столбец размерности $m+k$ задается как

$$\left(\left(\begin{array}{cc} a & fh \\ 0 & a' \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc} b & fi \\ 0 & b' \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} d^* & d^*gid'^* \\ 0 & d'^* \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} c & gh \\ 0 & c' \end{array}\right)\right)^\omega =$$

$$= \left(\begin{array}{cc} a+bd^*c & (f+bd^*g)(h+id'^*c') \\ 0 & a'+b'd'^*c' \end{array}\right)^\omega =$$

$$= \left(\begin{array}{c} (a+bd^*c)^\omega + (a+bd^*c)^*(f+bd^*g)(h+id'^*c')(a'+b'd'^*c')^\omega \\ (a'+b'd'^*c')^\omega \end{array}\right).$$

Последние $n+n'-(m+k)$ элементов матрицы $M^{\omega_{m+k}}$ задаются как произведение матрицы

$$\left(\begin{array}{cc} d & gi \\ 0 & d' \end{array}\right)^* \left(\begin{array}{cc} c & gh \\ 0 & c' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} d^*c & d^*g(h+id'^*c') \\ 0 & d'^*c' \end{array}\right)$$

с вектор-столбцом, вычисленным выше. Поэтому получим

$$\begin{array}{l} ||\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}'||\cdot 0 = (i_1\ 0\ i_2\ 0)M^{\omega_{m+k}} = i_1(a+bd^*c)^\omega + \\ +i_1(a+bd^*c)^*(f+bd^*g)(h+id'^*c)(a'+b'd'^*c')^\omega + i_2d^*c(a+bd^*c)^\omega + \\ +i_2d^*c(a+bd^*c)^*(f+bd^*g)(h+id'^*c')(a'+b'd'^*c')^\omega + \\ +i_2d^*g(h+id'^*c')(a'+b'd'^*c')^\omega . \end{array}$$

С другой стороны, по лемме 4.3 получим

$$\begin{array}{l} ||\mathfrak{A}||\cdot||\mathfrak{A}'||\cdot 0 = ||\mathfrak{A}||\cdot 0 + ||\mathfrak{A}||\P\cdot||\mathfrak{A}'||\cdot 0 = \\ = i_1(a+bd^*c)^\omega + i_2d^*c(a+bd^*c)^\omega + (i_1(a+bd^*c)^*(f+bd^*g) + \\ +i_2d^*c(a+bd^*c)^*(f+bd^*g) + i_2d^*g)(h+id'^*c')(a'+b'd'^*c')^\omega . \end{array}$$

Следовательно, $||\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}'||\cdot 0 = ||\mathfrak{A}||\cdot||\mathfrak{A}'||\cdot 0$.

Вычислим теперь $||\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}'||\P$. Если в матрице переходов M автомата $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}'$ переставить $m+1,\ldots,m+k$ строки и столбцы с $m+k+1,\ldots,n+k$ строками и столбцами и то же самое произвести с начальным и конечным векторами, то по тождеству «звезда перестановки» получим (см. Conway [7], Esik, Kuich [9])

$$||\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}'||\P = (i_1\ i_2\ 0\ 0)\left(\begin{array}{cccc} a & b & fh & fi \\ c & d & gh & gi \\ 0 & 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' & d' \end{array}\right)^*\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ p_1 \\ p_2 \end{array}\right) =$$

$$= (i_1\ i_2)\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)^*\left(\begin{array}{c} f \\ g \end{array}\right)(h\ i)\left(\begin{array}{cc} a' & b' \\ c' & d' \end{array}\right)^*\left(\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \end{array}\right) =$$

$$= ||\mathfrak{A}||\P\cdot||\mathfrak{A}'||\P = ||\mathfrak{A}||\cdot||\mathfrak{A}'||\P .$$

Следовательно, $||\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}'|| = ||\mathfrak{A}||\cdot||\mathfrak{A}'||$. □

Пусть $\mathfrak{A} = (n; h, i; a, b, c, d; f, g; k)$ — конечный A'-автомат, и запишем $I = (h\ i)$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $P = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$. Определим теперь конечный A'-автомат $\mathfrak{A}^{\otimes}$ как

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^{\otimes} \quad = \quad & (1+n+n; (1\ 0), (0\ 0); \begin{pmatrix} 0 & h \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & I \\ b & 0 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 0 & c \\ P & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; 1+k)\,. \end{aligned}$$

Теорема 4.5. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечный A'-автомат. Тогда $||\mathfrak{A}^{\otimes}|| = = ||\mathfrak{A}||^{\otimes}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ определен, как и ранее. Пусть

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & h & i & I \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ P & 0 & 0 & M \end{pmatrix}.$$

Вычислим сначала $||\mathfrak{A}^{\otimes}||\P$. Заметим, что M' можно записать как

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & I & I \\ 0 & M & 0 \\ P & 0 & M \end{pmatrix}$$

и что $||\mathfrak{A}^{\otimes}||\P = (M'^{*})_{11}$. Получим

$$\begin{aligned} (M'^{*})_{11} = & \left((I\ I) \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}^{*} \begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix} \right)^{*} = \\ = & (IM^{*}P)^{*} = (||\mathfrak{A}||\P)^{*} = ||\mathfrak{A}||^{\otimes}\P\,. \end{aligned}$$

Вычислим теперь первые $1+k$ элементов матрицы $M'^{\omega_{1+k}}$. Этот вектор-столбец размерности $1+k$ задается как

$$\begin{aligned} & \left(\begin{pmatrix} 0 & h \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & I \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}^{*} \begin{pmatrix} 0 & c \\ P & 0 \end{pmatrix} \right)^{\omega} = \\ = & \begin{pmatrix} IM^{*}P & h + id^{*}c \\ 0 & a + bd^{*}c \end{pmatrix}^{\omega}. \end{aligned}$$

Следовательно, $||\mathfrak{A}^{\otimes}|| \cdot 0 = (M^{\omega_{1+k}})_1 = (IM^{*}P)^{\omega} + (IM^{*}P)^{*}(h + id^{*}c) \times \times (a + bd^{*}c)^{\omega}$. По определению $||\mathfrak{A}||^{\otimes} \cdot 0 = (||\mathfrak{A}||\P)^{\omega} + (||\mathfrak{A}||\P)^{*}||\mathfrak{A}|| \cdot 0$. Таким образом, $||\mathfrak{A}||^{\otimes} \cdot 0 = (IM^{*}P)^{\omega} + (IM^{*}P)^{*}(h + id^{*}c)(a + bd^{*}c)^{\omega} = = ||\mathfrak{A}^{\otimes}|| \cdot 0$ и получаем $||\mathfrak{A}^{\otimes}|| = ||\mathfrak{A}||^{\otimes}$. $\square$

Теорема 4.6. *Пусть $\mathfrak{A} = (n, I, M, P, k)$ — конечный A'-автомат. Тогда существует конечный A'-автомат $\mathfrak{A}\P$, $||\mathfrak{A}\P|| = ||\mathfrak{A}||\P$.*

Доказательство. $||\mathfrak{A}||\P = (n, I, M, P, 0)$. $\square$

Теорема 4.7. *Пусть $a \in A' \cup \{0,1\}$. Тогда существует конечный A'-автомат $\mathfrak{A}_a$ такой, что $||\mathfrak{A}_a|| = a$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{A}_a = (2, \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (1\ 0), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 0)$, то

$$||\mathfrak{A}_a|| = (1\ 0) \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a\,.$$

$\square$

Следствие 4.8. *Поведение конечного A'-автомата образует обобщенное квемикольцо со звездой, которое содержит A'.*

Теорема 4.9 (Теорема Клини). *Пусть (A, V) — пара полукольцо-полумодуль Конвея. Тогда следующие утверждения эквивалентны для $(s, v) \in A \times V$:*

(i) $(s, v) = ||\mathfrak{A}||$, *где* $\mathfrak{A}$ *— конечный A'-автомат,*

(ii) $(s, v) \in \omega\text{-}\mathfrak{Rat}(A')$,

(iii) $s \in \mathfrak{Rat}(A')$ *и* $v \in \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} s_k t_k^m$, *где* $s_k, t_k \in \mathfrak{Rat}(A')$.

Доказательство. (ii) $\Rightarrow$ (iii). Каждый элемент матрицы M^{ω_k} имеет вид$(s, \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} s_k t_k^m)$, где $s, s_k, t_k \in \mathfrak{Rat}(A')$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). $(s, v) = (s, 0) + (0, v)$. Поскольку $(s, 0)$ лежит в $\mathfrak{Rat}(A') \subseteq \omega\text{-}\mathfrak{Rat}(A')$ и $(0, v) = (0, \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} s_k t_k^m)$ лежит в $\omega\text{-}\mathfrak{Rat}(A')$, то (s, v) лежит в $\omega\text{-}\mathfrak{Rat}(A')$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). По следствию 4.8. $\square$

5. Линейные системы над квемикольцами

Рассмотрим линейные системы над квемикольцами как обобщение регулярных грамматик с конечными и бесконечными выводами. Перед тем как перейти к этим системам, докажем две теоремы о матрицах (теоремы 5.1 и 5.4 для пар полукольцо-полумодуль Конвея) и две теоремы о полных парах полукольцо-полумодуль (теоремы 5.5 и 5.6).

Теорема 5.1. *Пусть (A, V) – пара полукольцо-полумодуль Конвея. Тогда для $0 \leqslant k \leqslant n$*

$$MM^{\omega_k} = M^{\omega_k}\,.$$

Доказательство. Пусть M разбита на блоки, как в (1), но блок a имеет размерность $k \times k$, а d — $(n-k) \times (n-k)$. Тогда по теореме 3.13

$$MM^{\omega_k} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a + bd^*c)^\omega \\ d^*c(a + bd^*c)^\omega \end{pmatrix} = M^{\omega_k}\,. \square$$

Две леммы необходимы для доказательства теоремы 5.4.

Лемма 5.2. *Пусть (A, V) — пара полукольцо-полумодуль Конвея и $0 \le k \le n$. Пусть $a \in A^{k\times k}$, $b_0, b_1 \in A^{k\times(n-k)}$, $c \in A^{(n-k)\times k}$, $d_0, d_1 \in A^{(n-k)\times(n-k)}$. Кроме того, пусть* $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix}$ *и* $M_1 = \begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & d_1 \end{pmatrix}$. *Тогда* $(M_0 + M_1)^{\omega_k} = (M_0^* M_1)^{\omega_k}$.

Доказательство.

$$(M_0^* M_1)^{\omega_k} = \left(\begin{pmatrix} E & b_0 d_0^* \\ 0 & d_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & d_1 \end{pmatrix} \right)^{\omega_k} =$$

$$= \begin{pmatrix} a + b_0 d_0^* c & b_1 + b_0 d_0^* d_1 \\ d_0^* c & d_0^* d_1 \end{pmatrix}^{\omega_k} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a + b_0 d_0^* c + (b_1 + b_0 d_0^* d_1)(d_0^* d_1)^* d_0^* c)^\omega \\ (d_0^* d_1)^* d_0^* c (a + b_0 d_0^* c + (b_1 + b_0 d_0^* d_1)(d_0^* d_1)^* d_0^* c)^\omega \end{pmatrix}.$$

Верхний блок равен $(a + b_0 d_0^* c + b_1 (d_0 + d_1)^* c + b_0 (d_0^* d_1)(d_0^* d_1)^* d_0^* c)^\omega = (a + (b_0 + b_1)(d_0 + d_1)^* c)^\omega$. Нижний блок равен $(d_0 + d_1)^* c (a + (b_0 + b_1)(d_0 + d_1)^* c)^\omega$. Следовательно, наша лемма доказана. □

Лемма 5.3. *Пусть (A, V) — пара полукольцо-полумодуль Конвея и $0 \leqslant k \leqslant n$. Пусть $a_0, a_1 \in A^{k\times k}$, $b \in A^{k\times(n-k)}$, $c_0, c_1 \in A^{(n-k)\times k}$, $d \in A^{(n-k)\times(n-k)}$, $a_0^\omega = 0$. Кроме того, пусть* $M_0 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ c_0 & 0 \end{pmatrix}$ *и* $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{pmatrix}$. *Тогда* $(M_0 + M_1)^{\omega_k} = M_0^* (M_1 M_0^*)^{\omega_k}$.

Доказательство.

$$(M_1 M_0^*)^{\omega_k} = \left(\begin{pmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0^* & 0 \\ c_0 a_0^* & E \end{pmatrix} \right)^{\omega_k} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 a_0^* + b c_0 a_0^* & b \\ c_1 a_0^* + d c_0 a_0^* & d \end{pmatrix}^{\omega_k} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1 a_0^* + b c_0 a_0^* + b d^* (c_1 a_0^* + d c_0 a_0^*))^\omega \\ d^* (c_1 a_0^* + d c_0 a_0^*)(a_1 a_0^* + b c_0 a_0^* + b d^* (c_1 a_0^* + d c_0 a_0^*))^\omega \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ((a_1 + b d^* (c_0 + c_1)) a_0^*)^\omega \\ (d^* c_1 + d^* d c_0)(a_0^* (a_1 + b d^* (c_0 + c_1)))^\omega \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$M_0^* (M_1 M_0^*)^{\omega_k} = \begin{pmatrix} (a_0^* (a_1 + b d^* (c_0 + c_1)))^\omega \\ d^* (c_0 + c_1)(a_0^* (a_1 + b d^* (c_0 + c_1)))^\omega \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a_0 + a_1 + b d^* (c_0 + c_1))^\omega \\ d^* (c_0 + c_1)(a_0 + a_1 + b d^* (c_0 + c_1))^\omega \end{pmatrix}.$$

На последнем шаге использовано тождество «омега-сумма» и использовано допущение $a_0^\omega = 0$. Следовательно, лемма доказана. □

Теорема 5.4. *Пусть* (A, V) — *пара полукольцо-полумодуль Конвея,* $0 \leqslant k \leqslant n$. *Пусть* $a_0, a_1 \in A^{k\times k}$, $b_0, b_1 \in A^{k\times(n-k)}$, $c_0, c_1 \in A^{(n-k)\times k}$, $d_0, d_1 \in A^{(n-k)\times(n-k)}$, *и* $(a_0 + b_0 d_0^* c_0)^\omega = 0$. *Кроме того, пусть*

$$M_{01} = \begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix}, \quad M_{02} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ c_0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(M_{01}^* M_{02})^*(M_{01}^* M_1 (M_{01}^* M_{02})^*)^* M_{01}^* = (M_{01} + M_{02} + M_1)^*,$$
$$(M_{01}^* M_{02})^*(M_{01}^* M_1 (M_{01}^* M_{02})^*)^{\omega_k} = (M_{01} + M_{02} + M_1)^{\omega_k}.$$

Доказательство. Левая часть первого равенства равна $(M_{01}^*(M_{02}+M_1))^* M_{01}^* = (M_{01}+M_{02}+M_1)^*$. Левый верхний блок матрицы $M_{01}^* M_{02}$ равен $a_0 + b_0 d_0^* c_0$. Следовательно, по лемме 5.3 левая часть второго равенства равна $(M_{01}^*(M_{02}+M_1))^{\omega_k}$, что по лемме 5.2 равняется $(M_{01} + M_{02} + M_1)^{\omega_k}$. □

Далее рассмотрим полное звезда-омега-полукольцо A. В следующих двух теоремах Σ_∞ — конечный или бесконечный алфавит.

Теорема 5.5. *Пусть* A — *полное звезда-омега-полукольцо. Тогда* $(A\langle\langle\Sigma_\infty^*\rangle\rangle, A\langle\langle\Sigma_\infty^\omega\rangle\rangle)$ — *полная пара полукольцо-полумодуль.*

Доказательство. Очевидно, что $A\langle\langle\Sigma_\infty^\omega\rangle\rangle$ — левый $A\langle\langle\Sigma_\infty^*\rangle\rangle$-полумодуль, и, кроме того, действие распределяется над всеми суммами по обоим аргументам. Пусть дана последовательность $s_1, s_2, \ldots$ в $A\langle\langle\Sigma_\infty^*\rangle\rangle$, определим $s = s_1 s_2 \ldots$ как

$$(s, w) \quad = \sum_{w = w_1 w_2 \ldots} (s_1, w_1)(s_2, w_2)\ldots$$

для всех $w \in \Sigma_\infty^*$. Проверим, что бесконечное произведение удовлетворяет всем трем условиям для операции бесконечного произведения в определении полной пары полукольцо-полумодуль главы 2.

Если $s_0, s_1, \ldots$ в $A\langle\langle\Sigma_\infty^*\rangle\rangle$ и $1 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \ldots$, то для всех $w \in \Sigma_\infty^\omega$

$$\begin{aligned}
&((s_1 \ldots s_{k_1})(s_{k_1+1} \ldots s_{k_2}) \ldots, w) = \\
&= \textstyle\sum_{w = w_1' w_2' \ldots} (s_1 \ldots s_{k_1}, w_1')(s_{k_1+1} \ldots s_{k_2}, w_2') \ldots = \\
&= \textstyle\sum_{w = w_1' w_2' \ldots} \sum_{w_1' = w_1 \ldots w_{k_1}} (s_1, w_1) \ldots (s_{k_1}, w_{k_1}) \times \\
&\times \textstyle\sum_{w_2' = w_{k_1+1} \ldots w_{k_2}} (s_{k_1+1}, w_{k_1+1}) \ldots (s_{k_2}, w_{k_2}) \ldots = \\
&= \textstyle\sum_{w = w_1' w_2' \ldots} \sum_{w_1' = w_1 \ldots w_{k_1}, w_2' = w_{k_1+1} \ldots w_{k_2}, \ldots} (s_1, w_1) \ldots (s_{k_1}, w_{k_1}) \times \\
&\times (s_{k_1+1}, w_{k_1+1}) \ldots = \textstyle\sum_{w = w_1 w_2 \ldots} (s_1, w_1)(s_2, w_2) \ldots = (s_1 s_2 \ldots, w),
\end{aligned}$$

что доказывает первое условие. Аналогично

$$\begin{aligned}
&(s_0 \cdot (s_1 s_2 \ldots), w) = \textstyle\sum_{w = w_0 w'} (s_0, w_0)(s_1 s_2 \ldots, w') = \\
&= \textstyle\sum_{w = w_0 w'} (s_0, w_0) \sum_{w' = w_1 w_2 \ldots} (s_1, w_1)(s_2, w_2) \ldots = \\
&= \textstyle\sum_{w = w_0 w'} \sum_{w' = w_1 w_2 \ldots} (s_0, w_0)(s_1, w_1)(s_2, w_2) \ldots = \\
&= \textstyle\sum_{w = w_0 w_1 w_2 \ldots} (s_0, w_0)(s_1, w_1)(s_2, w_2) \ldots = (s_0 s_1 s_2 \ldots, w),
\end{aligned}$$

что доказывает второе условие. Наконец, пусть $s^j_{i_j} \in A\langle\langle\Sigma^*_\infty\rangle\rangle$ для всех $i_j \in I_j$, $j \geqslant 1$, где каждое I_j — произвольное множество индексов. Тогда для каждого $w \in \Sigma^*_\infty$

$$\begin{aligned}
&(\textstyle\sum_{i_1\in I_1} s^1_{i_1} \sum_{i_2\in I_2} s^2_{i_2} \ldots, w) = \\
&= \textstyle\sum_{w=w_1w_2\ldots}(\sum_{i_1\in I_1} s^1_{i_1}, w_1)(\sum_{i_2\in I_2} s^2_{i_2}, w_2)\ldots = \\
&= \textstyle\sum_{w=w_1w_2\ldots}\sum_{(i_1,i_2,\ldots)\in I_1\times I_2\times\ldots}(s^1_{i_1}, w_1)(s^2_{i_2}, w_2)\ldots = \\
&= \textstyle\sum_{(i_1,i_2,\ldots)\in I_1\times I_2\times\ldots}\sum_{w=w_1w_2\ldots}(s^1_{i_1}, w_1)(s^2_{i_2}, w_2) = \\
&= \textstyle\sum_{(i_1,i_2,\ldots)\in I_1\times I_2\times\ldots}(s^1_{i_1}s^2_{i_2}\ldots, w),
\end{aligned}$$

что доказывае третье условие. $\square$

Теорема 5.6. *Пусть A — полное звезда-омега-полукольцо. Для $M^{(j)} \in (A\langle\langle\Sigma^*_\infty\rangle\rangle)^{n\times n}$, $j \geqslant 1$, определим $\prod_{j\geqslant 1} M^{(j)}$ как*

$$(\prod_{j\geqslant 1} M^{(j)})_i = \sum_{1\leqslant i_1,i_2,\ldots\leqslant n} M^{(1)}_{ii_1}M^{(2)}_{i_1i_2}M^{(3)}_{i_2i_3}\ldots, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n\,.$$

$((A\langle\langle\Sigma^*_\infty\rangle\rangle)^{n\times n}, (A\langle\langle\Sigma^\omega_\infty\rangle\rangle)^n)$ *— полная пара полукольцо-полумодуль.*

Доказательство. Мы проверим только третье условие для операции бесконечного произведения в определении полной пары полукольцо-полумодуль главы 2.

Пусть $M^{(i_j)} \in (A\langle\langle\Sigma^*_\infty\rangle\rangle)^{n\times n}$ для $j \geqslant 1$. Тогда для $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\begin{aligned}
&(\textstyle\prod_{j\geqslant 1}(\sum_{i_j\in I_j} M^{(i_j)}))_k = \\
&= \textstyle\sum_{1\leqslant k_1,k_2,\ldots\leq n}(\sum_{i_1\in I_1} M^{(i_1)})_{kk_1}(\sum_{i_2\in I_2} M^{(i_2)})_{k_1k_2}\ldots = \\
&- \textstyle\sum_{(i_1,i_2,\ldots)\in I_1\times I_2\times\ldots}\sum_{1\leqslant k_1,k_2,\ldots\leqslant n} M^{(i_1)}_{kk_1}M^{(i_2)}_{k_1k_2}\ldots = \\
&= \textstyle\sum_{(i_1,i_2,\ldots)\in I_1\times I_2\times\ldots}(\prod_{j\geqslant 1} M^{(i_j)})_k\,,
\end{aligned}$$

завершая проверку третьего условия. $\square$

A'-линейной системой (*относительно переменых $z_1, \ldots, z_n$ над квемикольцом $A \times V$*) является система уравнений

$$My + P = y, \tag{22}$$

где $M \in (A' \cup \{0,1\})^{n\times n}$, $P \in (A' \cup \{0,1\})^{n\times 1}$, $y = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. Вектор-столбец $\sigma \in (A \times V)^{n\times 1}$ называется *решением* системы (22), если

$$M\sigma + P = \sigma\,.$$

Теорема 5.7. *Пусть (A, V) — пара полукольцо-полумодуль Конвея. Рассмотрим A'-линейную систему*

$$My + P = y\,,$$

где $M \in (A' \cup \{0,1\})^{n\times n}$; $P \in (A' \cup \{0,1\})^{n\times 1}$; $y = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ *— вектор-столбец переменных. Тогда для любого* $0 \leqslant k \leqslant n$ *сумма* $M^{\omega_k} + M^*P$ *является решением системы* $My + P = y$.

Доказательство. По теореме 5.1 для любого $0 \leqslant k \leqslant n$

$$M(M^{\omega_k} + M^*P) + P = M^{\omega_k} + M^*P\,.$$

□

Пусть $\mathfrak{A}_i = (n, e_i, M, P, k)$, $1 \leqslant i \leqslant n$,— конечный A'-автомат, где e_i — i-й единичный вектор. Тогда $||\mathfrak{A}_i||$ является i-м компонентом решения данного в теореме 5.1 для A'-линейной системы $My + P = y$. Тогда назовем решение $\begin{pmatrix} ||\mathfrak{A}_1|| \\ \vdots \\ ||\mathfrak{A}_n|| \end{pmatrix} = M^{\omega_k} + M^*P$ системы $My + P = y$ *k-м теоретико-автоматным решением* системы $My + P = y$.

Теорема 5.8. *Пусть* (A, V) *— пара полукольцо-полумодуль Конвея и* $A' \subseteq A$. *Пусть* $\mathfrak{A} = (n, I, M, P, k)$ *— конечный* A'*-автомат. Тогда* $||\mathfrak{A}|| = I\sigma$, *где* σ *есть* k*-е теоретико-автоматное решение* A'*-линейной системы* $My + P = y$.

Пусть A — полное звезда-омега-полукольцо и рассмотрим A'-линейную систему $My + P = y$ над квемикольцом $A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle \times A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle$, определенным перед теоремой 5.7 для $A' = A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle$. Запишем эту систему в виде

$$z_i = \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{x\in\Sigma\cup\varepsilon}(M_{ij}, x)xz_j + \sum_{x\in\Sigma\cup\{\varepsilon\}}(P_i, x)x\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant n\,.$$

Ассоциируем с ней праволинейную грамматику $G_i = (\{z_1, \ldots, z_n\}, \Sigma, R, z_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, с весами в полукольце A, где $R = \{z_i \to (M_{ij}, x)xz_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n,\ x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}\} \cup \{z_i \to (P_i, x)x \mid x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}\}$. Здесь (M_{ij}, x) и (P_i, x) — веса продукций $z_i \to xz_j$ и $z_i \to x$ соответственно. (См. часть II [2] перед теоремой 3.8.) Кроме того, пусть $\mathfrak{A}_i^k = (n, e_i, M, P, k)$ есть конечный A'-автомат, $1 \leqslant i \leqslant n$, для некоторого фиксированного $k \in \{0, \ldots, n\}$, где e_i есть i-й единичный вектор-строка.

Рассмотрим теперь конечный вывод относительно G_i

$$\begin{aligned} &z_i \Rightarrow (M_{i,i_1}, x_1)x_1z_{i_1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow (M_{i,i_1}, x_1)\ldots(M_{i_{m-1},i_m}, x_m)x_1\ldots x_mz_{i_m} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (M_{i,i_1}, x_1)\ldots(M_{i_{m-1},i_m}, x_m)(P_{i_m}, x_{m+1})x_1\ldots x_mx_{m+1}, \end{aligned}$$

который порождает слово $x_1\ldots x_mx_{m+1}$ с весом $(M_{i,i_1}, x_1)\ldots \ldots(M_{i_{m-1},i_m}, x_m)(P_{i_m}, x_{m+1})$.

Этот конечный вывод соответствует конечному пути в направленном графе автомата $\mathfrak{A}_i^k$ $(z_i, x_1, z_{i_1}), \ldots, (z_{i_{m-1}}, x_m, z_{i_m})$ с весом $(M_{i,i_1}, x_1)\ldots(M_{i_{m-1},i_m}, x_m)$, начальным весом 1 и конечным весом $(P_{i_m}, x_{m+1})x_{m+1}$.

Рассмотрим теперь бесконечный вывод относительно G_i

$$z_i \Rightarrow (M_{i,i_1}, x_1)x_1 z_{i_1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (M_{i,i_1}, x_1) \ldots (M_{i_{m-1},i_m}, x_m)x_1 \ldots x_m z_{i_m} \Rightarrow \ldots,$$

который порождает бесконечное слово $x_1 x_2 \ldots x_m \ldots$ с весом $(M_{i,i_1}, x_1) \ldots (M_{i_{m-1},i_m}, x_m) \ldots$ Этот бесконечный вывод соответствует бесконечному пути в направленном графе автомата $\mathfrak{A}_i^k$

$$(z_i, x_1, z_{i_1}), \ldots, (z_{i_{m-1}}, x_m, z_{i_m}), \ldots$$

с весом $(M_{i,i_1}, x_1) \ldots (M_{i_{m-1},i_m}, x_m) \ldots$ и начальным весом 1.

Следовательно, согласно теоремам 4.1 и 5.5 получим следующий результат для G_i и $\mathfrak{A}_i^k$, определенных выше.

Теорема 5.9. *Если A — полное звезда-омега-полукольцо и $1 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant n$, то для $w \in \Sigma^*$, $(||\mathfrak{A}_i^k||, w) = ((M^*P)_i, w)$ являтся суммой весов всех конечных выводов слова w относительно G_i, а для $w \in \Sigma^\omega$, $(||\mathfrak{A}_i^k||, w) = ((M^{\omega_k})_i, w)$ являтся суммой весов всех конечных выводов слова w относительно G_i, таких, что не менее одной из переменных $\{z_1, \ldots, z_k\}$ встречается в этих бесконечных выводах бесконечное число раз.*

В частности, если $A = \mathbb{N}^\infty$ и $(M_{ij}, x), (P_i, x) \in \{0, 1\}$, $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, то мы получим следующий результат.

Теорема 5.10. *Для $w \in \Sigma^*$, $(||\mathfrak{A}_i^k||, w) = ((M^*P)_i, w)$ есть число конечных выводов слова w относительно G_i, а для $w \in \Sigma^\omega$, $(||\mathfrak{A}_i^k||, w) = ((M^{\omega_k})_i, w)$ есть число бесконечных выводов слова w относительно G_i таких, что не менее одной из переменных $\{z_1, \ldots, z_k\}$ встречается в этих бесконечных выводах бесконечное число раз.*

Удалим ε-переходы в конечном $A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle$-автомате без изменения его поведения.

Теорема 5.11. *Пусть $(A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle, A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle)$ — пара полукольцо-полумодуль Конвея, $(a\varepsilon)^\omega = 0$ для всех $a \in A$, и рассмотрим конечный $A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle$-автомат $\mathfrak{A} = (n, I, M, P, k)$. Тогда существует конечный $A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle$-автомат $\mathfrak{A}' = (n, I', M', P', k)$, $||\mathfrak{A}'|| = ||\mathfrak{A}||$, с условиями:*

(i) $M' \in (A\langle\Sigma\rangle)^{n \times n}$;

(ii) $I' \in (A\langle\varepsilon\rangle)^{1 \times n}$;

(iii) $P' \in (A\langle\varepsilon\rangle)^{n \times 1}$.

Доказательство. Без потери общности предположим по теореме 4.2, что $I \in (A\langle\varepsilon\rangle)^{1 \times n}$ и $P \in (A\langle\varepsilon\rangle)^{n \times 1}$. Пусть $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где a — размерности $k \times k$ и d — размерности $(n-k) \times (n-k)$. Пусть $a = a_0 + a_1$, $b = b_0 + b_1$, $c = c_0 + c_1$, $d = d_0 + d_1$, так что носители элементов матриц a_0, b_0, c_0, d_0 (соответственно a_1, b_1, c_1, d_1) являются подмножествами в $\{\varepsilon\}$ (соответственно Σ). Поскольку $\varepsilon^\omega = 0$, получим $(a_0 + b_0 d_0^* c_0)^\omega = 0$.

Определим матрицы M_{01}, M_{02} и M_1 как $M_{01} = \begin{pmatrix} 0 & b_0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix}$, $M_{02} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ c_0 & 0 \end{pmatrix}$ и $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$. Опишем теперь конечный $A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle$-автомат $\mathfrak{A}'$: $I' = I(M_{01}^* M_{02})^*$, $M' = M_{01}^* M_1 (M_{01}^* M_{02})^*$ и $P' = M_{01}^* P$. Поведение автомата $\mathfrak{A}'$ задается как

$$\begin{aligned}
&||\mathfrak{A}'|| = I'M'^*P' + I'M'^{\omega_k} = \\
&= I(M_{01}^* M_{02})^*(M_{01}^* M_1 (M_{01}^* M_{02})^*)^* M_{01}^* P + \\
&+ I(M_{01}^* M_{02})^*(M_{01}^* M_1 (M_{01}^* M_{02})^*)^{\omega_k} = \\
&= I(M_{01} + M_{02} + M_1)^* P + I(M_{01} + M_{02} + M_1)^{\omega_k} = \\
&= IM^*P + IM^{\omega_k} = ||\mathfrak{A}||\,.
\end{aligned}$$

Мы применили здесь теорему 5.4 в третьем равенстве. □

Теорема 5.12. *Пусть* $(A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle, A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle)$ *— пара полукольцо-полумодуль Конвея, где* $(a\varepsilon)^\omega = 0$ *для всех* $a \in A$, *и рассмотрим конечный* $A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle$*-автомат* $\mathfrak{A} = (n, I, M, P, k)$. *Тогда существует конечный* $A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle$*-автомат* $\mathfrak{A}' = (n+1, I', M', P', k)$ *такой, что* $||\mathfrak{A}'|| = ||\mathfrak{A}||$, *удовлетворяющий следующим условиям:*

(i) $M' \in (A\langle\Sigma\rangle)^{(n+1)\times(n+1)}$;

(ii) $I'_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$, *and* $I'_{n+1} = \varepsilon$;

(iii) $P' \in (A\langle\varepsilon\rangle)^{(n+1)\times 1}$.

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям теоремы 5.11. Тогда определим автомат $\mathfrak{A}'$ через $I' = (0 \;\; \varepsilon)$, $M' = \begin{pmatrix} M & 0 \\ IM & 0 \end{pmatrix}$ и $P' = \begin{pmatrix} P \\ IP \end{pmatrix}$. Вычислим $M'^* = \begin{pmatrix} M^* & 0 \\ IMM^* & 1 \end{pmatrix}$ и, для $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $I = (i_1 \; i_2)$,

$$IM'^{\omega_k} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ i_1 a + i_2 c & i_1 b + i_2 d & 0 \end{pmatrix}^{\omega_k} =$$

$$= \begin{pmatrix} (a+bd^*c)^\omega \\ d^*c(a+bd^*c)^\omega \\ (i_1(a+bd^*c) + i_2 d^* c)(a+bd^*c)^\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M^{\omega_k} \\ IM^{\omega_k} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $||\mathfrak{A}'|| = IMM^*P + IP + IM^{\omega_k} = ||\mathfrak{A}||$. □

В булевом полукольце конечные $\mathbb{B}\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle$-автоматы в теореме 5.12 есть не что иное, как конечные автоматы, введенные Buechi [6].

В случае полукольца $\mathbb{N}^\infty$ получим следующий результат.

Теорема 5.13. *Построения теорем 5.11 и 5.12 для $w \in \Sigma^*$ (соответственно для $w \in \Sigma^\omega$) не изменяют число конечных путей в диграфах конечных автоматов с меткой w из начального в конечное состояние (соответственно число бесконечных путей с меткой w, начинающихся в начальном состоянии и проходящих бесконечное число раз через повторяющиеся состояния).*

Пусть дана праволинейная грамматика $G_i = (\{z_1, \ldots, z_n\}, \Sigma, R, z_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, определенная как и ранее, и $k \in \{0, \ldots, n\}$, $L(G_i)_k$ по определению есть взвешенный язык

$$L(G_i)_k = \{((M^*P)_i, w)w \mid w \in \Sigma^*\} \cup \{((M^{\omega_k})_i, w)w \mid w \in \Sigma^\omega\}\,.$$

Следующая теорема 5.14 показывает, что такие взвешенные языки могут порождаться праволинейными грамматиками с весами в полукольце A, которые имеют только два типа продукций $z_i \to axz_j$ и $z_i \to a\varepsilon$, где $a \in A$ и $x \in \Sigma$. Следовательно, в таких праволинейных грамматиках не содержатся продукции $z_i \to az_j$. Следствие 5.15 показывает тогда, что два типа продукций могут быть выбраны как $z_i \to axz_j$ и $z_i \to ax$, где $a \in A$ и $x \in \Sigma$. (Конечно, ε больше не может быть выведено.)

Теорема 5.14. *Пусть $(A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle, A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle)$ — пара полукольцо-полумодуль Конвея, где $(a\varepsilon)^\omega = 0$ для всех $a \in A$. Рассмотрим $A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle$-линейную систему $My + P = y$, где $M \in (A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle)^{n\times n}$; $P \in (A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle)^{n\times 1}$; $y = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$; и пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда существует $A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle$-линейная система $M'y' + P' = y'$, где $M' \in (A\langle\Sigma\rangle)^{(n+1)\times(n+1)}$; $P' \in (A\langle\varepsilon\rangle)^{(n+1)\times 1}$; $y' = \begin{pmatrix} y \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$, такая, что*

$$(M'^{\omega_k} + M'^*P')_{n+1} = (M^{\omega_k} + M^*P)_i\,.$$

Доказательство. Рассмотрим конечный $A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle$-автомат $\mathfrak{A}_i^k = (n, e_i, M, P, k)$ с поведением $||\mathfrak{A}_i^k|| = (M^*P)_i + (M^{\omega_k})_i$. Начиная с $\mathfrak{A}_i^k$ выполним построения теорем 5.11 и 5.12. Это дает конечный $A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle$-автомат $\mathfrak{A}' = (n+1, e_{n+1}, M', P', k)$ с поведением $||\mathfrak{A}'|| = (M'^*P')_{n+1} + (M'^{\omega_k})_{n+1} = ||\mathfrak{A}_i^k||$. □

Следствие 5.15. *Пусть $(A\langle\langle\Sigma^*\rangle\rangle, A\langle\langle\Sigma^\omega\rangle\rangle)$ — пара полукольцо-полумодуль Конвея, где $(a\varepsilon)^\omega = 0$ для всех $a \in A$, рассмотрим $A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle$-линейную систему $My + P = y$, где $M \in (A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle)^{n\times n}$; $P \in (A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle)^{n\times 1}$; $y = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, и пусть $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тогда существует $A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle$-линейная система $M'y' + P' = y'$, где $M' \in (A\langle\Sigma\rangle)^{(n+1)\times(n+1)}$; $P' \in (A\langle\Sigma\rangle)^{(n+1)\times 1}$; $y' = \begin{pmatrix} y \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$ такая, что*

$$(M'^{\omega_k} + M'^*P')_{n+1} = (M^{\omega_k} + MM^*P)_i\,.$$

Доказательство. Пусть $M'y' + P'' = y'$ есть $A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle$-линейная система, построенная согласно теореме 5.14 из $My + P = y$. Рассмотрим $A\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle$-линейную систему $M'y' + P' = y'$, где $P' = M'P''$. Тогда $(M'^{\omega_k} + M'^* P')_{n+1} = (M'^{\omega_k} + M'^* M' P'')_{n+1} = (M^{\omega_k} + MM^* P)_i$. $\square$

Если мы рассмотрим $\mathbb{N}^\infty\langle\Sigma \cup \varepsilon\rangle$-линейную систему, то получим следующий результат о выводах относительно праволинейной грамматики G_i, определенной выше.

Теорема 5.16. *Построения теоремы 5.14 и следствия 5.15 для* $w \in \Sigma^+$ *(соответственно для* $w \in \Sigma^\omega$*) не изменяют число конечных выводов слова* w *относительно* G_i *(соответственно число бесконечных выводов слова* w *относительно* G_i *таких, что не менее одной из переменных* $\{z_1, \ldots, z_n\}$ *встречается в этих бесконечных выводах бесконечное число раз).*

Следовательно, построения переводят однозначную грамматику в однозначную грамматику.

Исследование частично поддержано акцией Австро-Венгерского научно-педагогического сотрудничества, проект 68ÖU2.

Supported by Aktion Österreich-Ungarn, Wissenschafts- und Erziehungskooperation, Projekt 68ÖU2.

Список литературы

1. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы I: полукольца Конвея и конечные автоматы // Вестник Калининградского государственного университета. Вып. 3. Сер. Информатика и телекоммуникации. 2003. С. 7—38.

2. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы II: непрерывные полукольца и алгебраические системы // Вестник Калининградского государственного университета. Вып. 1—2. Сер. Информатика и телекоммуникации. 2005. С. 19—45.

3. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы III: магазинные автоматы и формальные степенные ряды // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. Вып. 10. Сер. Физико-математические науки. 2006. С. 8—27.

4. *Алешников С. И., Болтнев Ю. Ф., Език З. и др.* Формальные языки и автоматы IV: трансдукторы и абстрактные семейства // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта. Вып. 10. Сер. Физико-математические науки. 2008. С. 6—23.

5. *Bloom St. L., Ésik Z.* Iteration theories. EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer, 1993.

6. *Buechi J. R.* On a decision method in restricted second order arithmetic // Proc. Int. Congr. Logic, Methodology and Philosophy of Science. 1962. P. 1–11.

7. *Conway J. H.* Regular algebra and finite machines. Chapman & Hall, 1971.

8. *Elgot C.* Matricial theories // J. Algebra. 1976. N 42. P. 391–422.

9. *Ésik Z., Kuich W.* Inductive *-semirings // Theoretical Computer Science. 2004. N 324. P. 3–33.
10. *Ésik Z., Kuich W.* On iteration semiring-semimodule pairs // Semigroup Forum. 2007. N 75. P. 129–159.
11. *Ésik Z., Kuich W.* A semiring-semimodule generalization of ω-regular languages II // Journal of Automata, Languages and Combinatorics. 2005. N 10. P. 243–264.

Об авторах

С. И. Алешников — канд. физ.-мат. наук, доц., РГУ им. И. Канта, cyber@mathd.albertina.ru

Ю. Ф. Болтнев — ст. преп., РГУ им. И. Канта, cyber@mathd.albertina.ru

З. Език — д-р, Сегедский ун-т, Венгрия.

С. А. Ишанов — канд. физ.-мат. наук, проф., РГУ им. И. Канта, math@dekan.albertina.ru

В. Куих — д-р, Венский техн. ун-т, Австрия.

Autors

Dr. S. I. Aleshnikov – assistant professor, IKSUR, e-mail: cyber@mathd.albertina.ru

Yu. F. Boltnev – high instructor, IKSUR, e-mail: cyber@mathd.albertina.ru

Dr. Z. Ésik – University of Szeged, Hungary.

Dr. S. A. Ishanov – professor, IKSUR, e-mail: math@dekan.albertina.ru

Dr. B. Kuich – Technische Universitдt Wien, Austria.