Список литературы

1. *Белова О. О.* Связность в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Чебоксары. 2006. №5 (52). С. 18—20.
2. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.
3. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.
4. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

O. Belova

THE CONNECTION OF THE 2-ND TYPE IN THE FIBERING ASSOCIATED WITH GRASSMAN-LIKE MANIFOLD OF CENTRED PLANES

Grassman-like manifold $Gr^*(m,n)$ of centred m-planes is considered in the projective space P_n. Analog of Norden's normalization is made. It is proved, this analog induces the conection of the 2-nd type in the fibering associated with the manifold $Gr^*(m,n)$.

УДК 514.76

К. М. Буданов

(Пензенский государственный педагогический университет)

ЛИФТЫ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТИ И ФУНКЦИЙ В РАССЛОЕНИЕ ВЕЙЛЯ НАД СПЕЦИАЛЬНОЙ АЛГЕБРОЙ ВЕЙЛЯ

Рассмотрен полный лифт линейной связности в расслоение Вейля над алгеброй Вейля специального вида и построены горизонтальные функции, порождаемые дифференциальными формами на расслоении Вейля.

Пусть A — алгебра Вейля высоты 2 и размерности N, M_n — дифференцируемое многообразие размерности n с линейной связностью ∇ и M_n^A — расслоение Вейля над алгеброй Вейля А. Тогда на многообразии M_n^A существует линейная связность ∇^C, удовлетворяющая условию:

$$\nabla^C{}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\nabla_X Y)^{(ab)}$$

для любых $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ и $a, b \in A$ [4; 5]. Связность ∇^C называется *полным лифтом связности* ∇ в расслоение Вейля M_n^A.

Пусть связность ∇ имеет коэффициенты Γ_{ij}^k:

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k .$$

Тогда связность ∇^C имеет коэффициенты $\Gamma_{ij\sigma}^{\alpha\beta k}$:

$$\nabla_{\partial_i^\alpha} \partial_j^\beta = \Gamma_{ij\sigma}^{\alpha\beta k} \partial_k^\sigma ,$$

где $\alpha, \beta, \sigma, ... = 0, ..., N-1$. Известно [5], что коэффициенты $\Gamma_{ij\sigma}^{\alpha\beta k}$ определяются равенствами

$$\Gamma_{ij\sigma}^{\alpha\beta k} = \gamma_\tau^{\alpha\beta} \gamma_\sigma^{\tau\mu} (\Gamma_{ij}^k)_{(\mu)} , \tag{1}$$

где $\gamma_\sigma^{\alpha\beta}$ — структурные константы алгебры *A*, функции $(\Gamma_{ij}^k)_{(\mu)}$ являются (μ) -лифтами функций Γ_{ij}^k в расслоение Вейля M_n^A.

Если T_{jk}^i — компоненты тензора кручения и R_{jkl}^i — компоненты тензора кривизны связности ∇, то можно показать, что компоненты тензора кручения $T_{jk\sigma}^{\alpha\beta i}$ и тензора кривизны $R_{jkl\sigma}^{\alpha\beta\mu i}$ связности ∇^C определяются, соответственно, выражениями:

$$T_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = \gamma_\nu^{\alpha\beta} \gamma_\sigma^{\nu\tau} (T_{jk}^i)_{(\tau)} , \tag{2}$$

$$R_{jkl\sigma}^{\alpha\beta\mu i} = \gamma_\nu^{\alpha\beta} \gamma_\rho^{\nu\mu} \gamma_\sigma^{\rho\tau} (R_{jkl}^i)_{(\tau)} . \tag{3}$$

Кроме того, в силу коммутативности и ассоциативности алгебры Вейля A имеем:

$$T^{\alpha\beta i}_{jk\sigma} = T^{\beta\alpha i}_{jk\sigma}, \qquad (4)$$

$$R^{\alpha\beta\mu i}_{jkl\sigma} = R^{\alpha\mu\beta i}_{jkl\sigma} = R^{\mu\alpha\beta i}_{jkl\sigma} = R^{\mu\beta\alpha i}_{jkl\sigma} = R^{\beta\mu\alpha i}_{jkl\sigma} = R^{\beta\alpha\mu i}_{jkl\sigma}. \qquad (5)$$

Пусть A — специальная алгебра Вейля [1; 2] размерности 4 с ненулевыми структурными константами:

$$\gamma^{00}_0 = \gamma^{01}_1 = \gamma^{10}_1 = \gamma^{02}_2 = \gamma^{20}_2 = \gamma^{03}_3 = \gamma^{30}_3 = \gamma^{11}_3 = 1,\ \gamma^{22}_3 = q. \quad (6)$$

На основании соотношений (1) — (6) получаем ненулевые компоненты линейной связности ∇^C:

$$\Gamma^{00k}_{ij\sigma} = (\Gamma^k_{ij})_{(\sigma)}, \text{ где } \sigma = 0, 1, 2, 3,$$

$$\Gamma^{11k}_{ij3} = \Gamma^{01k}_{ij1} = \Gamma^{10k}_{ij1} = \Gamma^{02k}_{ij2} = \Gamma^{20k}_{ij2} = \Gamma^{03k}_{ij3} = \Gamma^{30k}_{ij3} = (\Gamma^k_{ij})_{(0)},$$

$$\Gamma^{22k}_{ij3} = q(\Gamma^k_{ij})_{(0)},\ \Gamma^{01k}_{ij3} = \Gamma^{10k}_{ij3} = (\Gamma^k_{ij})_{(1)},\ \Gamma^{02k}_{ij3} = \Gamma^{20k}_{ij3} = q(\Gamma^k_{ij})_{(2)},$$

тензора кручения: $T^{00i}_{jk\sigma} = (T^i_{jk})_{(\sigma)}$,

$$T^{11i}_{jk3} = T^{01i}_{jk1} = T^{10i}_{jk1} = T^{02i}_{jk2} = T^{20i}_{jk2} = T^{03i}_{jk3} = T^{30i}_{jk3} = (T^i_{jk})_{(0)},$$

$$T^{22i}_{jk3} = q(T^i_{jk})_{(0)},\ T^{01i}_{jk3} = T^{10i}_{jk3} = (T^i_{jk})_{(1)},\ T^{02i}_{jk3} = T^{20i}_{jk3} = q(T^i_{jk})_{(2)}$$

и тензора кривизны: $R^{000i}_{jkl\sigma} = (R^i_{jkl})_{(\sigma)}$,

$$R^{001i}_{jkl1} = R^{010i}_{jkl1} = R^{100i}_{jkl1} = R^{002i}_{jkl2} = R^{020i}_{jkl2} = R^{200i}_{jkl2} = (R^i_{jkl})_{(0)},$$

$$R^{003i}_{jkl3} = R^{030i}_{jkl3} = R^{300i}_{jkl3} = R^{011i}_{jkl3} = R^{101i}_{jkl3} = R^{110i}_{jkl3} = (R^i_{jkl})_{(0)}$$

$$R^{001i}_{jkl3} = R^{010i}_{jkl3} = R^{100i}_{jkl3} = (R^i_{jkl})_{(1)},$$

$$R^{022i}_{jkl3} = R^{202i}_{jkl3} = R^{220i}_{jkl3} = q(R^i_{jkl})_{(0)},$$

$$R^{002i}_{jkl3} = R^{020i}_{jkl3} = R^{200i}_{jkl3} = q(R^i_{jkl})_{(2)},$$

соответственно.

Для 1-формы ω и 2-формы θ, заданных на многообразии M_n, в расслоении M_n^A можно построить [3], соответственно, функции $\gamma_{1\alpha}\omega$ и $\gamma_{2\alpha}\theta$, ($\alpha = 1, 2, \ldots, N - 1$), которые в локальных координатах определяются выражениями:

$$\gamma_{1\alpha}\omega = (\omega_i)_{(0)} x_\alpha^i + \frac{1}{2}(\partial_j \omega_i)_{(0)} x_\sigma^j x_\tau^i \gamma_\alpha^{\sigma\tau}, \qquad (7)$$

$$\gamma_{2\alpha}\theta = \frac{1}{2}(\theta_{ij})_{(0)} x_\sigma^j x_\tau^i \gamma_\alpha^{\sigma\tau}. \qquad (8)$$

Заметим, что если на многообразии M_n задана линейная связность ∇, то 1-форма ω порождает в расслоении Вейля M_n^A функцию:

$$\omega_{[\alpha]} = (\omega_i)_{(0)} (x_\alpha^i + \frac{1}{2}(\Gamma_{jk}^i)_{(0)} x_\sigma^j x_\tau^k \gamma_\alpha^{\sigma\tau}), \qquad (9)$$

где Γ_{jk}^i — коэффициенты линейной связности ∇.

Можно отметить следующее тождество:

$$\gamma_{1\alpha}\omega = \omega_{[\alpha]} + \gamma_{2\alpha}(\nabla\omega),$$

где $\nabla\omega$ — ковариантный дифференциал 1-формы ω.

Если $\omega = df$, где f — произвольная функция на многообразии M_n, то введём обозначение:

$$f_{[\alpha]} = df_{[\alpha]}.$$

Тогда выражения (7) и (9), соответственно, примут вид:

$$\gamma_{1\alpha} df = (\partial_i f)_{(0)} x_\alpha^i + \frac{1}{2}(\partial_j \partial_i f)_{(0)} x_\sigma^j x_\tau^i \gamma_\alpha^{\sigma\tau},$$

$$f_{[\alpha]} = (\partial_i f)_{(0)} (x_\alpha^i + \frac{1}{2}(\Gamma_{jk}^i)_{(0)} x_\sigma^j x_\tau^k \gamma_\alpha^{\sigma\tau}).$$

Учитывая, что

$$f_{(\alpha)} = (\partial_i f)_{(0)} x_\alpha^i + \frac{1}{2}(\partial_j \partial_i f)_{(0)} x_\sigma^j x_\tau^i \gamma_\alpha^{\sigma\tau},$$

окончательно получим:

$$\gamma_{1\alpha} df = f_{(\alpha)}, \tag{10}$$

$$f_{[\alpha]} = (\partial_i f)_{(0)} (x^i_\alpha + \frac{1}{2} (\Gamma^i_{jk})_{(0)} x^j_\sigma x^k_\tau \gamma^{\sigma\tau}_\alpha). \tag{11}$$

Функции $f_{[\alpha]}$ назовём *горизонтальными лифтами* функции *f* в расслоение Вейля M^A_n.

Для координатных функций x^i получим *горизонтальные координатные функции*:

$$x^i_{[\alpha]} = x^i_\alpha + \frac{1}{2} (\Gamma^i_{jk})_{(0)} x^j_\sigma x^k_\tau \gamma^{\sigma\tau}_\alpha. \tag{12}$$

Тогда выражения (11) можно записать в виде:

$$f_{[\alpha]} = (\partial_i f)_{(0)} x^i_{[\alpha]}. \tag{13}$$

Можно отметить следующее свойство горизонтальных лифтов функций:

$$(fg)_{[\alpha]} = f_{(0)} g_{[\alpha]} + f_{[\alpha]} g_{(0)}. \tag{14}$$

В расслоении Вейля над алгеброй Вейля *A*, имеющей структурные константы (6), получаем следующие локальные выражения. Для горизонтальных координатных функций (12):

$$x^i_{[1]} = x^i_1,\ x^i_{[2]} = x^i_2,\ x^i_{[3]} = x^i_3 + \frac{1}{2} (\Gamma^i_{ls})_{(0)} (x^l_1 x^s_1 + q x^l_2 x^s_2).$$

Для горизонтальных лифтов функций (13):

$$f_{[1]} = (\partial_i f)_{(0)} x^i_{[1]},\ f_{[2]} = (\partial_i f)_{(0)} x^i_{[2]},\ f_{[3]} = (\partial_i f)_{(0)} x^i_{[3]}.$$

Для функций (7), порожденных 1-формой ω:

$$\gamma_{11}\omega = (\omega_i)_{(0)} x^i_1,\ \gamma_{12}\omega = (\omega_i)_{(0)} x^i_2,$$

$$\gamma_{13}\omega = (\omega_i)_{(0)} x^i_3 + \frac{1}{2} (\partial_j \omega_i)_{(0)} (x^j_1 x^i_1 + q x^j_2 x^i_2).$$

Для функций (9), порожденных 2-формой θ:

$$\gamma_{21}\theta = 0,\ \gamma_{22}\theta = 0,\ \gamma_{23}\theta = \frac{1}{2} (\theta_{ij})_{(0)} (x^j_1 x^i_1 + q x^j_1 x^i_1).$$

Список литературы

1. *Буданов К. М.* Лифты функций и векторных полей в расслоение Вейля над алгеброй Вейля высоты 2 // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 14—18.
2. *Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В.* Пространства над алгебрами. Казань, 1985.
3. *Султанов А. Я.* Горизонтальные лифты линейных связностей на расслоениях Вейля второго порядка // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2005. Вып. 36. С. 133—140.
4. *Султанов А. Я.* Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля // Изв. вузов. Сер. Математика. 1999. №9. С. 64—72.
5. *Morimoto A.* Prolongation of connections to bundles of infinitely near points // J. Differential Geom. 1976. V. 11. №4. P. 479—498.

K. Budanov

LIFTS OF LINEAR CONNECTION AND FUNCTIONS ON WEIL BUNDLE OVER SPECIAL WEIL ALGEBRA

Complete lift of linear connection to Weil bundle over special Weil algebra is considered and horizontal functions generated by differential forms on Weil bundle are constructed.

УДК 514.75

С. Ю. Волкова

(Балтийский военно-морской институт)

ДВОЙСТВЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА S-РАСПРЕДЕЛЕНИИ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С БАЗИСНЫМ Λ-ПОДРАССЛОЕНИЕМ

Изучается специальный класс скомпонованных трехсоставных распределений проективного простран-