Yu. Shevchenko

TANGENTIAL AND OSCULATING SPACES OF PROJECTIVE BUNDLE

The derivation formulas of projective bundle are entered, which typical fiber is the projective space. The continuation of these formulas has allowed to determine the tangential projective space and containing it the osculating projective space to the projective bundle. It is shown, the ordinary and dual to it tangential subspaces of the tangential projective space are crossed on a fiber of the projective bundle, and in the sum give the tangential space. The section and cosection of projective bundle allocate in every tangential space the fixed ordinary and dual tangential subspaces.

УДК 514.75

С. Н. Юрьева

(Российский государственный университет им. И. Канта)

СКОМПОНОВАННЫЕ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассматривается специальный класс гиперплоскостных распределений (Н-распределений) аффинного пространства A_n, в каждом центре X которого выполняются соотношения: $[\Lambda_{n-2}(X), L_1(X)]=H_{n-1}(X)$; $\Lambda_{n-2}(X)\cap L_1(X)=X$. Такие Н-распределения называются скомпонованными [4], или кратко SH-распределениями. Дано задание SH-распределения в аффинном пространстве, и приведена теорема существования. Показано, что в дифференциальных окрестностях 1-го и 2-го порядка внутренним образом присоединяются нормали 1-го и 2-го рода Н-, L-, Λ-подрасслоений. Введено в рассмотрение взаимно-однозначное соответствие между нормалями 1-го и 2-го

рода Н-подрасслоения, которое является аналогом соответствия Бомпьяни — Пантази [2]. Приведено построение пучков нормалей 1-го и 2-го рода Λ-, L-, H-подрасслоений.

Схема использования индексов такова:

$$J, K, L = \overline{1, n}; \quad i, j, k = \overline{1, n-2}; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = \overline{1, n-1}.$$

Знак "≡" означает сравнение по модулю базисных форм ω^K.

1. Рассмотрим n-мерное аффинное пространство A_n, отнесённое к подвижному реперу $R = \{X, \bar{e}_J\}$, уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид:

$$dX = \omega^J \bar{e}_J, \; d\bar{e}_J = \omega_J^K \bar{e}_K. \tag{1}$$

Формы Пфаффа ω^J, ω_J^K удовлетворяют структурным уравнениям аффинного пространства A_n

$$D\omega^J = \omega^L \Lambda \omega_L^J, \; D\omega_J^K = \omega_J^L \Lambda \omega_L^K. \tag{2}$$

Присоединим к образующему элементу SH-распределения подвижной репер R^0 следующим образом: $X \equiv A$ (A — центр плоскости H(A)), векторы $\bar{e}_J \parallel \Lambda_{n-2}$, $\bar{e}_{n-1} \parallel L$. В репере R^0 уравнения SH-распределения имеют вид:

$$\begin{gathered} \omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega^K, \; \omega_i^{n-1} = \Lambda_{iK}^{n-1} \omega^K, \\ \omega_n^i = L_{n-1,K}^i \omega^K, \; \omega_{n-1}^n = L_{n-1,K}^n \omega^K. \end{gathered} \tag{3}$$

Замыкая уравнения (3) с учетом уравнений (1) — (3), получим

$$\begin{gathered} \nabla \Lambda_{iK}^n = \Lambda_{iKL}^n \omega^L, \; \nabla \Lambda_{iK}^{n-1} + \Lambda_{iK}^n \omega_n^{n-1} = \Lambda_{iKL}^{n-1} \omega^L, \\ \nabla L_{n-1,K}^i + L_{n-1,K}^n \omega_n^i = L_{n-1,KL}^i \omega^L, \; \nabla L_{n-1,K}^n = L_{n-1,KL}^n \omega^L. \end{gathered} \tag{4}$$

Нетрудно показать, что система (3), (4) — в инволюции и справедлива

Теорема 1. *В пространстве* A_n SH-*распределение существует с произволом* 3n–5 *функций* n *аргументов*.

2. Функции $\{H^n_{\alpha K}\} \overset{def}{=} \{\Lambda^n_{iK}, L^n_{n-1,K}\}$ в силу соотношений (4) удовлетворяют уравнениям $\nabla H^n_{\alpha K} = H^n_{\alpha KL}\omega^L$. Откуда следует, что

$$\nabla H^n_{\alpha\beta} = H^n_{\alpha\beta K}\omega^K, \ \nabla H^n_{\alpha n} - H^n_{\alpha i}\omega^i_n - H^n_{\alpha,n-1}\omega^{n-1}_n \equiv 0. \qquad (5)$$

Тензоры Λ^n_{ij}, $H^n_{\alpha\beta}$, $L^n_{n-1,n-1}$ в общем случае невырожденные. Поэтому для них введём обращённые им тензоры

$$\Lambda^{ij}_n, \ H^{\alpha\beta}_n, \ L^{n-1,n-1}_n. \qquad (6)$$

Построим в дифференциальной окрестности 1-го порядка (с учётом уравнений (4) — (5)) охваты квазитензоров ν^i_n, ν^{n-1}_n, ν^α_n, которые задают поля внутренних нормалей 1-го рода в смысле Нордена (N_2, N_{n-1}, N_1), (l_2, l_{n-1}, l_1), (h_2, h_{n-m}, h_1) соответственно Λ-, L-, H-подрасслоений SH-распределения.

Итак, имеем:

$$\begin{cases} N_2: \nu^i_n = \Lambda^i_n \overset{def}{=} -\Lambda^{ij}_n(\Lambda^n_{jn} + \Lambda^n_{j,n-1}\Lambda^{n-1}_n), \\ N_{n-1}: \nu^{n-1}_n = \Lambda^{n-1}_n \overset{def}{=} \dfrac{1}{n-2}\Lambda^{n-1}_{ij}\Lambda^{ji}_n, \\ N_1: \nu^\alpha_n = \Lambda^\alpha_n \overset{def}{=} \{\Lambda^i_n, \Lambda^{n-1}_n\}; \end{cases} \qquad (7)$$

$$\begin{cases} l_2: \nu^i_n = L^i_n \overset{def}{=} L^{n-1,n-1}_n L^i_{n-1,n-1}, \\ l_{n-1}: \nu^{n-1}_n = L^{n-1}_n \overset{def}{=} -\Lambda^{n-1,n-1}_n(\Lambda^n_{n-1,n} + \Lambda^n_{n-1,i}L^i_n), \\ l_1: \nu^\alpha_n = L^\alpha_n \overset{def}{=} \{L^i_n, L^{n-1}_n\}; \end{cases} \qquad (8)$$

$$\begin{cases} h_2: \nu^i_n = H^i_n \overset{def}{=} -H^{i\beta}_n H^n_{\beta n}, \\ h_{n-1}: \nu^{n-1}_n = H^{n-1}_n \overset{def}{=} -H^{n-1,\beta}_n H^n_{\beta n}, \\ h_1: \nu^\alpha_n = H^\alpha_n \overset{def}{=} -H^{\alpha\beta}_n H^n_{\beta n} \overset{def}{=} \{H^i_n, H^{n-1}_n\}. \end{cases} \qquad (9)$$

В результате выполняется

Теорема 2. *Поля нормалей 1-го рода в смысле Нордена* (7) — (9) *соответственно* Λ-, L-, H-*подрасслоений являются внутренними и присоединены к* SH-*распределению в его дифференциальной окрестности 1-го порядка.*

3. Рассмотрим способ построения нормалей 1-го рода SH-распределения в дифференциальной окрестности 2-го порядка, исходя из построенных ранее квазитензоров $\Lambda_n^\alpha, L_n^\alpha, H_n^\alpha$. Продолжая уравнения

$$\nabla\Lambda_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \Lambda_{nK}^\alpha \omega^K, \tag{10}$$

получим

$$\begin{cases} \nabla\Lambda_{nK}^\alpha + (\Lambda_n^\alpha H_{\gamma K}^n + \Lambda_n^\beta H_{\beta K}^n \delta_\gamma^\alpha)\omega_n^\gamma \equiv 0, \\ \nabla\Lambda_{n\beta}^\alpha + (\Lambda_n^\alpha H_{\gamma\beta}^n + \Lambda_n^\delta H_{\delta\beta}^n \delta_\gamma^\alpha)\omega_n^\gamma \equiv 0, \\ \nabla\Lambda_{nn}^\alpha - (\Lambda_{n\beta}^\alpha - \Lambda_n^\alpha H_{\beta n}^n - \Lambda_n^\gamma H_{\gamma n}^n \delta_\beta^\alpha)\omega_n^\beta \equiv 0. \end{cases} \tag{11}$$

Функции $\Lambda_{n\beta}^\alpha, H_{\gamma\beta}^n$, удовлетворяющие соответственно уравнениям (11), (5), позволяют построить тензор

$$A_{n\beta}^\alpha \overset{\det}{=} \Lambda_{n\beta}^\alpha - \Lambda_n^\alpha \Lambda_n^\gamma H_{\gamma\beta}^n,\ \nabla A_{n\beta}^\alpha \equiv 0 \tag{12}$$

и обратный ему тензор $\tilde{A}_\gamma^{n\beta}$:

$$A_{n\beta}^\alpha \tilde{A}_\gamma^{n\beta} = \delta_\gamma^\alpha,\ \nabla\tilde{A}_\gamma^{n\beta} \equiv 0. \tag{13}$$

С помощью уравнений (10) — (13) убеждаемся, что функции $A_n^\alpha = -\tilde{A}_\beta^{n\alpha}(\Lambda_{nn}^\beta - \Lambda_n^\beta \Lambda_n^\gamma H_{\gamma n}^n)$ образуют квазитензор $\{A_n^\alpha\}$, так как

$$\nabla A_n^\alpha + \omega_n^\alpha = A_{nK}^\alpha \omega^K. \tag{14}$$

Квазитензор $\{A_n^\alpha\}$ распадается на два квазитензора: $\{A_n^\alpha\} \overset{\text{def}}{=} \{A_n^i, A_n^{n-1}\}$, т. е.

$$\nabla A_n^i + \omega_n^i \equiv 0, \ \ \nabla A_n^{n-1} + \omega_n^{n-1} \equiv 0. \qquad (15)$$

Поля квазитензоров $A_n^i; A_n^{n-1}; A_n^\alpha$ (14), (15) задают поля нормалей 1-го рода в смысле Нордена $A_2; A_{n-1}; A_1$ соответственно Λ-, L-, H-подрасслоений SH-распределения в дифференциальной окрестности 2-го порядка. Аналогичные построения проводим, исходя из квазитензоров L_n^α, H_n^α :

$$\nabla L_n^\alpha + \omega_n^\alpha = L_{nK}^\alpha, \ \nabla H_n^\alpha + \omega_n^\alpha = H_{nK}^\alpha \omega^K. \qquad (16)$$

В результате получим функции

$$B_n^\alpha = -\tilde{B}_\beta^{n\alpha}\left(L_{nn}^\beta - L_n^\beta L_n^\gamma L_{\gamma n}^n\right), \ C_n^\alpha = -\tilde{C}_\beta^{n\alpha}\left(H_{nn}^\beta - H_{nn}^\beta H_n^\gamma H_{\gamma n}^n\right), \ (17)$$

которые удовлетворяют уравнениям

$$\nabla B_n^\alpha + \omega_n^\alpha = B_{nK}^\alpha \omega^K, \ \nabla C_n^\alpha + \omega_n^\alpha = C_{nK}^\alpha \omega^K.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что каждый квазитензор (17) распадается на два квазитензора:

$$\{B_n^\alpha\} = \{B_n^i, \ B_n^{n-1}\}, \ \{C_n^\alpha\} = \{C_n^i, \ C_n^{n-1}\}.$$

Квазитензоры $\left(B_n^i, B_n^{n-1}, B_n^\alpha\right)$ и $\left(C_n^i, C_n^{n-1}, C_n^\alpha\right)$ задают поля нормалей 1-го рода $\left(B_2, B_{n-1}, B_1\right)$ и $\left(C_2, C_{n-1}, C_1\right)$ в смысле Нордена соответственно Λ-, L-, H-подрасслоений.

Итак, имеет место

Теорема 3. *Поля нормалей 1-го рода в смысле Нордена* $\left(A_2, A_{n-1}, A_1\right)\left(B_2, B_{n-1}, B_1\right)$, $\left(C_2, C_{n-1}, C_1\right)$ *соответственно* Λ-, L-, H-*подрасслоений являются внутренними и присоединены к* SH-*распределению в его дифференциальной окрестности 2-го порядка.*

4. Рассмотрим тензор

$$\nu_\alpha = -H_{\alpha\beta}^n \nu_n^\beta - H_{\alpha n}^n, \ \nabla \nu_\alpha = \nu_{\alpha K} \omega^K, \qquad (18)$$

который задаёт в каждом центре A плоскость $\nu_{n-2}(A)$ $\left(\nu_{n-2}(A) \subset H(A), \ A \notin \nu_{n-2}(A)\right)$, т. е. нормаль 2-го рода гиперплоскости H(A). Уравнения (18) можно разрешить относительно $\{\nu_n^\alpha\}$:

$$\nu_n^\beta = -H_n^{\beta\alpha}\nu_\alpha + H_n^\beta,\ \nabla\nu_n^\beta + \omega_n^\beta = \nu_{nK}^\beta\omega^K. \qquad (19)$$

В локальном репере нормаль 2-го рода $\nu_{n-1}(A)$ гиперплоскости H(A) определяются уравнениями:

$$\nu_\alpha x^\alpha - 1 = 0;\ x^n = 0. \qquad (20)$$

Пересечение плоскости $\nu_{n-2}(A)$ с плоскостью $\Lambda(A)$ в локальном репере задается уравнениями

$$\nu_i x^i \text{-}1{=}0,\ x^{n\text{-}1}{=}0,\ x^n{=}0, \qquad (21)$$

а с прямой $L_1(A)$ — уравнениями

$$x^i = 0,\ x^{n\text{-}1} = \frac{1}{n-1},\ x^n = 0. \qquad (22)$$

Таким образом, тензор ν_α распадается на два тензора $(\nu_i, \nu_{n\text{-}1})$, которые определяют в каждом центре A нормали 2-го рода (21), (22) соответственно плоскости $\Lambda(A)$ и прямой $L_1(A)$.

В силу соответствия Бомпьяни — Пантази (18) схема построения нормалей 2-го рода Λ-, L-, H-подрасслоений такова:

$$\{\nu_n^\beta\} \to \{\nu_\alpha\} \to \{\nu_i, \nu_{n\text{-}1}\}. \qquad (23)$$

Прежде всего отметим, что нормали 1-го рода $\{H_n^\alpha\}$ в соответствии Бомпьяни — Пантази соответствует бесконечно удаленная (n – 2)-плоскость, так как в силу (9) в этом случае $h_\alpha = -H_{\alpha\beta}^n H_n^\beta - H_{\alpha n}^n = 0$ и уравнения (20) задают бесконечно удаленную плоскость.

Квазитензоры H_n^α, Λ_n^α, L_n^α функционально независимы, поэтому они определяют в дифференциальной окрестности 1-го порядка три однопараметрических пучка нормалей 1-го рода H-подрасслоения (ε - параметр):

$$\zeta_n^\alpha(\varepsilon) = (1-\varepsilon)H_n^\alpha + \varepsilon\Lambda_n^\alpha, \quad \eta_n^\alpha(\varepsilon) = (1-\varepsilon)H_n^\alpha + \varepsilon L_n^\alpha,$$
$$\vartheta_n^\alpha(\varepsilon) = (1-\varepsilon)\Lambda_n^\alpha + \varepsilon L_n^\alpha.$$

По схеме (23) имеем

$$\{\Lambda_n^\beta\} \to \{\lambda_\alpha = -H_{\alpha\beta}^n\Lambda_n^\beta - H_{\alpha n}^n\} \to$$
$$\to \{\lambda_i = -H_{i\beta}^n\Lambda_n^\beta - H_{in}^n;\ \lambda_{n\text{-}1} = -H_{n-1,\beta}^n\Lambda_n^\beta - H_{n-1,n}^n\},$$
$$\{L_n^\beta\} \to \{l_\alpha = -H_{\alpha\beta}^n L_n^\beta - H_{\alpha n}^n\} \to$$
$$\to \{l_i = -H_{i\beta}^n\Lambda_n^\beta - H_{in}^n;\ l_{n\text{-}2} = -H_{n-1,\beta}^n L_n^\beta - H_{n-1,n}^n\}.$$

Тензоры λ_α и l_α порождают в дифференциальной окрестности 1-го порядка однопараметрический пучок нормалей 2-го рода H-подрасслоения:

$$\rho_\alpha(\varepsilon) = (1-\varepsilon)\lambda_\alpha + \varepsilon l_\alpha. \qquad (24)$$

Пучок нормалей 2-го рода (24), в свою очередь, порождает семейства нормалей 2-го рода

$$\rho_i(\varepsilon)=(1\text{-}\varepsilon)\lambda_i+\varepsilon l_i,\ \rho_{n\text{-}1}(\varepsilon)=(1\text{-}\varepsilon)\lambda_{n\text{-}1}+\varepsilon l_{n\text{-}1}$$

соответственно Λ-, L-подрасслоений.

В дифференциальной окрестности 2-го порядка по схеме (23) имеем:

$$\{A_n^\beta\} \to \{a_\alpha = -H_{\alpha\beta}^n A_n^\beta - H_{\alpha n}^n\} \to$$
$$\to \{a_i = -H_{i\beta}^n A_n^\beta - H_{in}^n;\ a_{n\text{-}1} = -H_{n-1,\beta}^n A_n^\beta - H_{n-1,n}^n\},$$
$$\{B_n^\beta\} \to \{b_\alpha = -H_{\alpha\beta}^n B_n^\beta - H_{\alpha n}^n\} \to$$
$$\to \{b_i = -H_{i\beta}^n B_n^\beta - H_{in}^n;\ b_{n\text{-}1} = -H_{n-1,\beta}^n B_n^\beta - H_{n-1,n}^n\},$$
$$\{C_n^\beta\} \to \{C_\alpha = -H_{\alpha\beta}^n C_n^\beta - H_{\alpha n}^n\} \to$$
$$\to \{C_i = -H_{i\beta}^n C_n^\beta - H_{in}^n;\ C_{n\text{-}1} = -H_{n-1,\beta}^n C_n^\beta - H_{n-1,n}^n\}.$$

Квазитензоры A_n^β, B_n^β, C_n^β функционально независимы и поэтому порождают три пучка нормалей 1-го рода H-подрасслоения в дифференциальной окрестности 2-го порядка (σ — параметр):

$$\mu_n^\beta(\sigma)=A_n^\beta-\sigma(A_n^\beta-C_n^\beta),\ \ \xi_n^\beta(\sigma)=B_n^\beta-\sigma(B_n^\beta-C_n^\beta),$$

$$\varphi_n^\beta(\sigma)=A_n^\beta-\sigma(A_n^\beta-C_n^\beta).$$

Тензоры a_α, b_α, c_α задают три пучка нормалей 2-го рода Н-подрасслоения:

$$\mu_\beta(\sigma)=(1-\sigma)a_\beta+\sigma c_\beta;\ \xi_\beta(\sigma)=(1-\sigma)b_\beta-\sigma c_\beta;$$

$$\varphi_\beta(\sigma)=(1-\sigma)a_\beta+\sigma c_\beta,$$

которые порождают соответственно по три пучка нормалей 2-го рода Λ-, L-подрасслоений:

$$\mu_i(\sigma)=(1-\sigma)a_i+\sigma c_i,\ \xi_i(\sigma)=(1-\sigma)b_i-\sigma c_i,$$

$$\varphi_i(\sigma)=(1-\sigma)a_i+\sigma c_i;$$

$$\mu_{n-1}(\sigma)=(1-\sigma)a_{n-1}+\sigma c_{n-1},\ \xi_{n\text{-}1}(\sigma)=(1-\sigma)b_{n-1}-\sigma c_{n-1},$$

$$\varphi_{n-1}(\sigma)=(1-\sigma)_{n-1}+\sigma c_{n-1}.$$

Список литературы

1. *Алшибая Э.Д.* К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т. 5. С. 169—193.

2. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т. 3. С. 49—94.

3. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

4. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства. СПб., 1992.

S. Yureva

THE COMPOSED HYPERPLANE DISTRIBUTIONS OF THE AFFINE SPACE

Special class of the hyperplane distributions of the affine space are considered.