ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

М.Ф.Косаренко

СВЯЗНОСТИ НА ОСНАЩЕННОЙ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЕ SH_τ В НЕЕВКЛИДОВОМ N-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ${}^{\ell}S_N$ РАНГА ℓ

Настоящая работа посвящена изучению связностей в расслоениях,ассоциированных с регулярной гиперполосой SH_τ в неевклидовом пространстве ${}^{\ell}S_N$ [6].

Работа выполнена теоретико-групповым методом Г.Ф.Лаптева [1].

На протяжении всего изложения индексы пробегают следующие значения:

$$i,j,k=\overline{1,\tau}\,;\ \alpha,\beta,\gamma=\overline{\tau+1,N-1}\,;\ \mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}=\overline{0,N}.$$

1.Отнесем пространство ${}^{\ell}S_N$ с абсолютом

$$g'_{\mathcal{I}\mathcal{J}}x^{\mathcal{I}}x^{\mathcal{J}}=0\,,\quad g'_{\mathcal{I}\mathcal{J}}=g'_{\mathcal{J}\mathcal{I}}\,,\quad \det\|g'_{\mathcal{I}\mathcal{J}}\|\neq 0$$

к подвижному автополярному нормированному реперу $R=\{A_0,A_1,\ldots,A_N\}$ [6]. Наряду с точечным подвижным репером $R=\{A_{\mathcal{I}}\}$ рассмотрим двойственный ему репер $\{\tau^{\mathcal{K}}\}$,элементы которого $\tau^{\mathcal{K}}$ являются гранями репера R : $(A_{\mathcal{I}},\tau^{\mathcal{K}})=\delta^{\mathcal{K}}_{\mathcal{I}}$.

Специализируем репер,поместив точки $\{A_i\}$ в касательную плоскость T_τ базисной поверхности V_τ гиперполосы SH_τ ,точки $\{A_\alpha\}$-в характеристическую плоскость $X_{N-\tau-1}$ гиперполосы SH_τ ,а точка A_N пусть занимает произвольное положение,образуя с точками $\{A_0,A_i,A_\alpha\}$ проективный репер $\{A_{\mathcal{I}}\}$ пространства ${}^{\ell}S_N$.Такой репер назовем репером первого порядка гиперполосы SH_τ.В этом репере дифференциальные уравнения

гиперполосы SH_τ записываются в виде:

$$\omega^N_0=0\,,\quad \omega^N_\alpha=0\,,\quad \omega^\alpha_0=0\,,\tag{1}$$

$$\omega^0_N=0\,,\quad \omega^\alpha_N=0\,,\quad \omega^0_\alpha=0\,,\tag{2}$$

$$\omega^N_i=a_{ij}\omega^j\,,\quad \nabla a_{ij}=-a_{ij}\,\omega^N_N-a_{ijk}\,\omega^k\,,\tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned}&\omega^i_\alpha=b^i_{\alpha j}\omega^j=\lambda^{ij}_\alpha\omega^N_j\,,\quad \nabla b^i_{\alpha j}=b^i_{\alpha jk}\,\omega^k\,,\\ &\nabla\lambda^{ij}_\alpha=\lambda^{ij}_\alpha\,\omega^N_N+\lambda^{ijk}_\alpha\,\omega^N_k\,,\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

$$\omega^\alpha_i=\lambda^\alpha_{ij}\omega^j\,,\quad \nabla\lambda^\alpha_{ij}=\lambda^\alpha_{ijk}\,\omega^k\,,\tag{5}$$

$$\omega^0_i=-\varepsilon_{0i}\,\omega^i\,,\qquad \omega^i_N=-\varepsilon_{iN}\,a_{ij}\,\omega^j\,,\tag{6}$$

где $b^i_{\alpha j}a_{i\ell}=b^i_{\alpha\ell}a_{ij}$, $a_{ij}=a_{ji}$, $\lambda^{ij}_\alpha=\lambda^{ji}_\alpha$, $\lambda^\alpha_{ij}=\lambda^\alpha_{ji}$, $\lambda^\alpha_{ij}=-\varepsilon_{\alpha i}\,b^i_{\alpha j}$, а функции a_{ijk}, $b^i_{\alpha jk}$, λ^{ijk}_α, λ^α_{ijk} симметричны по индексам i,j,k.

2.Система форм $\{\omega^i,\ \omega^\beta_\alpha,\ \omega^N_N\}$,удовлетворяющая структурным уравнениям Картана-Лаптева [1],[3]:

$$d\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j\,,\tag{7}$$

$$d\omega^\beta_\alpha=\omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma+\frac{1}{2}R^\beta_{\alpha k\ell}\,\omega^k\wedge\omega^\ell\,,\tag{8}$$

$$d\omega^N_N=\frac{1}{2}R^N_{Nk\ell}\,\omega^k\wedge\omega^\ell\,,\tag{9}$$

где

$$R^\beta_{\alpha k\ell}=2\,\Big(-\sum_i b^i_{\alpha[k}\,b^i_{|\beta|\ell]}\,\varepsilon_{\beta i}\Big)\,,\tag{10}$$

$$R^N_{Nk\ell}=2\,\Big(-\sum_i a_{i[k}\,a_{\ell]i}\,\varepsilon_{iN}\Big)\,,\tag{11}$$

определяет центропроективную связность гиперполосы SH_τ. Эта связность возникает на расслоении,слоями которого являются нормали 1-го рода $N_{N-\tau}$ базисной поверхности V_τ гиперполосы SH_τ.Такую связность будем называть нормальной связностью гиперполосы SH_τ .

О п р е д е л е н и е.Говорят,что нормальная связность является плоской [4],[5],если формы кручения-кривизны этой связности тождественно обращаются в нуль, т.е. когда $R^\beta_{\alpha k\ell}=0$, $R^N_{Nk\ell}=0$.

Рассмотрим в пространстве ${}^{\ell}S_N$ такие гиперполосы SH_τ,поле нормалей 1-го рода которых допускает $(N-\tau)$-

параметрическое семейство $(\mathcal{L})$ τ-мерных поверхностей $\mathcal{L}_\tau$, касательные плоскости которых в точках пересечения с нормалью 1-го рода $N_{N-\tau}(A_0)$ проходят через соответствующую нормаль 2-го рода $\mathcal{N}_{\tau-1}(A_0)$ базисной поверхности V_τ гиперполосы SH_τ. Такие гиперполосы пространства ${}^\ell S_N$ назовем вполне нормальными гиперполосами.

Т е о р е м а 1. Для того, чтобы гиперполоса $SH_\tau \subset {}^\ell S_N$ была вполне нормальной гиперполосой, необходимо и достаточно, чтобы ее нормальная связность была плоской.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть произвольная точка $M = A_0 + \xi^\alpha A_\alpha + \xi^N A_N$, принадлежащая нормали 1-го рода $N_{N-\tau}(A_0)$ базисной поверхности V_τ гиперполосы SH_τ, описывает поверхность $\mathcal{L} \in (\mathcal{L})$. Тогда в разложении

$$dM = (\omega^i + \xi^\alpha \omega^i_\alpha + \xi^N \omega^i_N) A_i + (d\xi^\alpha + \xi^\gamma \omega^\alpha_\gamma) A_\alpha + + (d\xi^N \omega^N_N) A_N$$

коэффициенты при A_α и A_N должны быть равны нулю. Следовательно,

$$d\xi^\alpha + \xi^\gamma \omega^\alpha_\gamma = 0, \quad d\xi^N + \xi^N \omega^N_N = 0. \qquad (12)$$

Так как система уравнений (12) должна быть вполне интегрируема, то, дифференцируя (12) внешним образом, получим:

$$d\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma, \quad d\omega^N_N = 0. \qquad (13)$$

Оказывается, соотношения (13) являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы гиперполоса SH_τ была вполне нормальной гиперполосой.

В силу (8), (9) условия (13) равносильны тому, что нормальная связность гиперполосы SH_τ является плоской.

Следуя работе [2], теорему 1 можно сформулировать в виде:

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы нормальная центропроективная связность гиперполосы $SH_\tau \subset {}^\ell S_N$ была плоской, необходимо и достаточно, чтобы ее горизонтальное распределение λ_τ было инволютивным [2].

3. Структурные уравнения для системы форм $\{\omega^i, \omega^\beta_\alpha\}$ имеют вид (7), (8). Поэтому, в силу теоремы Картана-Лаптева [1], в расслоении, слоями которого являются характеристики $X_{N-\tau-1}(A_0)$ гиперполосы SH_τ, возникает центропроективная связность. Назовем эту связность характеристической связностью гиперполосы SH_τ

Имеют место следующие теоремы:

Т е о р е м а 3. Характеристическая связность является плоской тогда и только тогда, когда поле характеристик гиперполосы $SH_\tau \subset {}^\ell S_N$ допускает $N-\tau-1$-параметрическое семейство τ-мерных поверхностей, касательные плоскости которых проходят через нормали 2-го рода $\mathcal{N}_{\tau-1}$ базисной поверхности V_τ гиперполосы SH_τ.

Т е о р е м а 4. Для того, чтобы характеристическая связность гиперполосы $SH_\tau \subset {}^\ell S_N$ была плоской, необходимо и достаточно, чтобы ее горизонтальное распределение было инволютивным [2].

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. - Труды Моск. матем. об-ва, 1953, т.2, с.275-382.

2. Лумисте Ю.Г. Теория связностей в расслоенных пространствах. - В сб.: Алгебра. Топология. Геометрия. 1969. Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР. М., 1971, с.123-168.

3. Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И. Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева. - Тр. геометр. семинара. Всес. ин-т научн. и техн. информ., 1973, 4, с.7-70.

4. Чакмазян А.В. Нормализованное по Нордену подмногообразие V_m в P_n с параллельным нормальным подрасслоением. - Матем. заметки, 1977, 22, №5, с.649-662.

5. Чакмазян А.В. Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия V_m в P_n. - В сб.: Проблемы геометрии, т.10. Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР. М., 1978, с.55-74.

6. Косаренко М.Ф. Построение внутренних инвариантных точечного и тангенциального реперов регулярной гиперполосы $SH_\tau \subset {}^\ell S_N$. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.13. Калининград, 1982, с.38-44.