УДК 517.9

О БИФУРКАЦИЯХ РОЖДЕНИЯ ПРИТЯГИВАЮЩИХ ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ФАЗОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.А.З а й ц е в

(Калининградский государственный университет)

В статье приводится пример интегрируемой динамической системы, в фазовом пространстве которой существуют притягивающие инвариантные многообразия (аттракторы). Этот пример показывает, что известные способы изучения аттракторов и бифуркаций их рождения [1] - [3] можно дополнить методами теории интегрируемых гамильтоновых систем, в том числе алгоритмом интегрирования Лиувилля-Гамильтона-Якоби, а также методами симплектической геометрии и обратной задачи рассеяния [4], [5]. Отправным пунктом работы стал анализ модельного уравнения в [6], решение которого иллюстрирует бифуркацию рождения устойчивого предельного цикла.

Введем необходимые обозначения. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и $Q(x)=\langle Sx,x\rangle$ $(S^T=S)$ – положительно определенная квадратичная форма в $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{J}$ – линейный S-кососимметричный оператор в $\mathbb{R}^n$: $\langle Sx,\mathfrak{J}x\rangle=0$, I – единичный оператор, $f(\tau)$ – ограниченная непрерывно дифференцируемая функция, область определения которой есть луч $0\le\tau<\infty$, символом S_e обозначен эллипсоид $Q(x)=1$.

Будет использован следующий факт: решение задачи Коши для автономного дифференциального уравнения

$$\dot{\tau}=2\tau f(\tau) \tag{I}$$

(точка наверху означает дифференцирование по времени t) для любого начального значения $\tau_0=\tau|_{t=0}$ на луче $0\le\tau<\infty$ существует, единственно и его областью определения является вся числовая прямая $-\infty<t<\infty$. Уравнение (I) интегрируемо в том смысле, что его решение в случае $\tau_0 f(\tau_0)\ne0$ получается разделением переменных в виде квадратуры; при $\tau_0 f(\tau_0)=0$ решением является постоянная функция $\tau(t)=\tau_0$.

Т е о р е м а 1. Нелинейное уравнение

$$\dot{x}=(\mathfrak{J}+f(Q(x))I)x \tag{2}$$

является интегрируемым и его общее решение дается формулой

$$x(t)=\sqrt{\tau(t)}\,e^{\mathfrak{J}t}c, \tag{3}$$

где $\tau(t)$ – общее решение уравнения (I), $c\in S_e$ – произвольная (векторная) постоянная интегрирования.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверить, что условие теоремы существования и единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения (2) выполнено. Пусть $x(t)$ – решение уравнения (2) и $\tau(t)=Q(x(t))$. Тогда $\tau(t)$ есть решение уравнения (I), что показывают следующие выкладки:

$$\dot{\tau}=\frac{d}{dt}\langle Sx,x\rangle=2\langle Sx,\dot{x}\rangle=2\langle Sx,\mathfrak{J}x\rangle+2\langle Sx,f(\tau)x\rangle=2f(\tau)\langle Sx,x\rangle=2\tau f(\tau).$$

Полагаем далее

$$x=\tau^{1/2}y,\quad y=\tau^{-1/2}x, \tag{4}$$

где $\tau(t)$ – решение уравнения (I). Покажем, что

$$y(t)\in S_e,\quad \dot{y}=\mathfrak{J}y. \tag{5}$$

Используя определение $\tau(t)$, получаем

$$Q(y)=\langle S(\tau^{-1/2}x),\tau^{-1/2}x\rangle=\tau^{-1}\langle Sx,x\rangle=\tau^{-1}\tau=1\Leftrightarrow y\in S_e.$$

Дифференциальное уравнение для y получится, если продифференцировать формулу (4) и использовать уравнения (I) и (2); это дает

$$\dot{y}=-\tfrac{1}{2}\tau^{-3/2}\dot{\tau}x+\tau^{-1/2}\dot{x}=-\tfrac{1}{2}\tau^{-3/2}2\tau f(\tau)x+\tau^{-1/2}(\mathfrak{J}x+f(\tau)x)=$$
$$=-\tau^{-1/2}f(\tau)x+\tau^{-1/2}\mathfrak{J}(\tau^{1/2}y)+\tau^{-1/2}f(\tau)x=\tau^{-1/2}\tau^{1/2}\mathfrak{J}y=\mathfrak{J}y,$$

т.е. обе формулы (5) доказаны. Решая уравнение (5), получаем

$$y=e^{\mathfrak{J}t}c,\quad c\in S_e,$$

откуда следует формула (3).

П р е д л о ж е н и е 1. Пусть H обозначает множество корней уравнения $f(\tau)=0$, которое предполагается конечным, тогда каждый из эллипсоидов $Q(x)=\tau_0$ $(\tau_0\in H)$ является инвариантным многообразием в фазовом пространстве динамической системы (2). Если к тому же корень τ_0 простой и $\frac{d}{d\tau}(\tau f(\tau))\big|_{\tau=\tau_0}<0$, то инвариантный эллипсоид $Q(x)=\tau_0$ является аттрактором.

Первая часть утверждения следует из доказательства теоремы I, т.к. при $\tau_0\in H$ получаем $\frac{d}{dt}Q(x(t))=0$; вторая часть основывается на представлении (3) и известных фактов теории динамических систем [1] - [3].

С помощью систем вида (2) можно изучать бифуркации рождения притягивающих инвариантных эллипсоидов, если функция f зависит (кроме τ) от бифуркационного параметра ν: $f=f(\tau,\nu)$.

П р е д л о ж е н и е 2. Если при переходе через точку бифуркации $\nu=\nu_c$ на фазовой полупрямой $0\le r<\infty$ динамической системы (I) появляется аттрактор, то в результате того же перехода в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ многомерной динамической системы (2) рождается притягивающий инвариантный эллипсоид.

Систему (2) можно обобщить, рассматривая динамические системы с фазовыми пространствами, для которых существует дифференцируемое вложение в $M\times T$, где M – симплектическое многообразие интегрируемой гамильтоновой системы, а T – область некоторого евклидова пространства, в котором действует фазовый поток, порожденный линейным уравнением $\dot{x}=Jx$, причем T есть инвариантное многообразие этого потока. Решение проблемы интегрируемости в этом случае состоит в построении указанного дифференцируемого отображения. В некоторых случаях M может быть фазовым пространством простой интегрируемой системы, в частности, для уравнения (2) $M=[0;+\infty)$, $T=S_\ell$.

Библиографический список

I. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций // Совр. проблемы матем. Фундамен. направления / ВИНИТИ. М., 1985. Т.5. С.5-218.

2. Palis J., Melo W. Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction. N.Y.: Springer-Verlag, 1982. 198 pp.

3. Marsden J.E., Mc Craken M. The Hopf Bifurcation and Its Applications // Appl. Math. Sciences / N.Y.: Springer-Verlag, 1976. V.19. 408 pp.

4. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1979. 760 с.

5. Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 414 с.

6. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 926 с.

УДК 514.75

ОБ ОДНОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ИЗОТРОПНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В НЕВЫРОЖДЕННЫХ НЕЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е.Т.Ивлев

(Томский политехнический университет)

Проведена классификация изотропных m-мерных поверхностей V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$, когда текущая точка $V\in V_m$ лежит на абсолюте Q пространства ${}^{\ell}S_{n+1}$. Эта классификация аналогична той, которая проводится в [1] для неизотропных m-поверхностей V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$. Обозначения и терминология соответствуют принятым в [1] – [4].

1. Рассматривается случай изотропной m-поверхности V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$, когда $V=A_0\in Q$, т.е. с учетом ([1], (2), (5)), когда

$$g_{00}\equiv(A_0,A_0)=0. \tag{I}$$

В этом случае репер R m-поверхности V_m в ${}^{\ell}S_{n+1}$, о котором идет речь в ([1], п.I), выберем так, чтобы

$$g_{0i}=0,\quad g_{ij}=\begin{cases}0, & i\ne j,\\ \varepsilon_i, & i=j;\end{cases}\quad g_{n+1,j}=0,\quad g_{n+1,n+1}=0,\quad g_{n+1,0}=1,\quad \varepsilon_i=\pm1\quad (i,j,k,\ell=\overline{1,n}). \tag{2}$$

Тогда соотношения ([1], (9)) в силу (I) принимают следующий вид:

$$\begin{gathered}\omega_\alpha^{n+1}=A^{n+1}_{\alpha\gamma}\omega_0^\gamma,\quad \omega_a^{n+1}=0,\quad \omega_0^{n+1}=0,\quad \omega^0_{n+1}=0,\quad \omega_0^0+\omega_{n+1}^{n+1}=0,\\ \omega_0^\alpha=A^\alpha_{a\gamma}\omega_0^\gamma,\ \varepsilon_\alpha\omega_\beta^\alpha+\varepsilon_\beta\omega_\alpha^\beta=0\ (\text{по } \alpha \text{ и } \beta \text{ не суммировать}),\\ \omega_{n+1}^k=-\varepsilon_k\omega_k^0,\ \varepsilon_a\omega_b^a+\varepsilon_b\omega_a^b=0\ (\text{по } a \text{ и } b \text{ не суммировать}),\\ \alpha,\beta,\gamma=\overline{1,m};\quad a,b,c=\overline{m+1,n},\end{gathered} \tag{3}$$

где с учетом ([1], (6), (3))

$$A^{n+1}_{\alpha\gamma}=\begin{cases}0, & \alpha\ne\gamma,\\ -\varepsilon, & \alpha=\gamma,\end{cases}\qquad A^\alpha_{a\beta}=-\varepsilon_\alpha\varepsilon_a A^a_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

$$\nabla A^\alpha_{a\beta}+A^\alpha_{a\beta}\omega_0^0-\delta^\alpha_\beta\omega_a^0=A^\alpha_{a\beta\gamma}\omega_0^\gamma. \tag{5}$$

Из ([I], (I)) с учетом (2) и (I) следует, что абсолют Q в рассматриваемом репере определяется следующим уравнением:

$$\sum_{\alpha=1}^{m}\varepsilon_\alpha(x^\alpha)^2+\sum_{a=m+1}^{n}\varepsilon_a(x^a)^2+x^0x^{n+1}=0, \tag{6}$$