УДК 514.75

М. А. Чешкова

*(Алтайский государственный университет,
г. Барнаул)*

К ГЕОМЕТРИИ БУТЫЛКИ КЛЕЙНА

В евклидовом пространстве E^3 рассматривается погружение бутылки Клейна. В процессе исследования используется система компьютерной математики *Maple*.

Ключевые слова: бутылка Клейна, лист Мёбиуса.

Бутылку Клейна зададим параметризацией

$$x = (a + \cos\frac{u}{2}\sin v - \sin\frac{u}{2}\sin 2v)\cos u,$$

$$y = (a + \cos\frac{u}{2}\sin v - \sin\frac{u}{2}\sin 2v)\sin u,$$

$$z = \sin\frac{u}{2}\sin v + \cos\frac{u}{2}\sin 2v.$$

Используя математический пакет *Maple* [1], построим ее, полагая $a = 4$ (рис. 1).

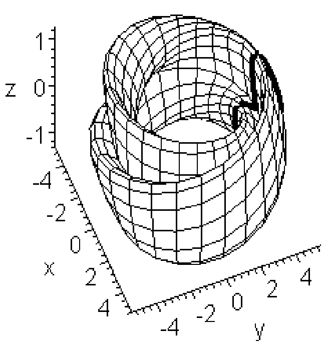

Рис. 1. Бутылка Клейна

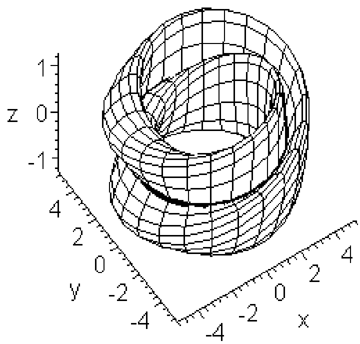

Рис. 2. $u = \dfrac{\pi}{2}$

Исследуем координатные линии $u = c = const$.

Линии $u = const$

$$x = (a + cos\frac{c}{2}sin\,v - sin\frac{c}{2}sin\,2v)\,cos\,c,$$

$$y = (a + cos\frac{c}{2}sin\,v - sin\frac{c}{2}sin\,2v)\,sin\,c,$$

$$z = sin\frac{c}{2}sin\,v + cos\frac{c}{2}sin\,2v$$

имеют вид восьмерки, расположенной в плоскости $x\,sin\,c - y\,cos\,c = 0$, причем кратная точка принадлежит окружности $v = 0$ (рис. 1).

Рассмотрим лист Мёбиуса [2]:

$$x = (4 + t\,cos\frac{u}{2})\,cos\,u,\; y = (4 + t\,cos\frac{u}{2})\,sin\,u, \qquad (3)$$

$$z = t\,sin\frac{u}{2}.$$

Исследуем линии $v = c$ на бутылке Клейна.

Среди линий $v = c$ две линии: $v = \frac{\pi}{2}, v = 0$ — принадлежат листу Мёбиуса (3).

Линии $v = \frac{\pi}{2}$ и $v = 0$ легли на лист Мёбиуса — одна ($v = 0$) как средняя линия (окружность), другая ($v = \frac{\pi}{2}$) как линия края (рис. 5, 6). Будем для краткости называть эти линии на бутылке Клейна средней линией и линией края.

Если разрезать бутылку Клейна вдоль линии края, получим два листа Мёбиуса (нелинейчатых) (рис. 7, 8).

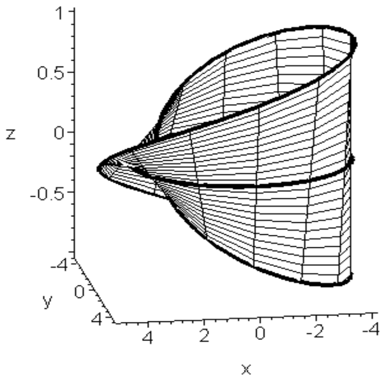

Рис. 5. Линии края
и средняя линия $v = 0, v = \pi / 2$

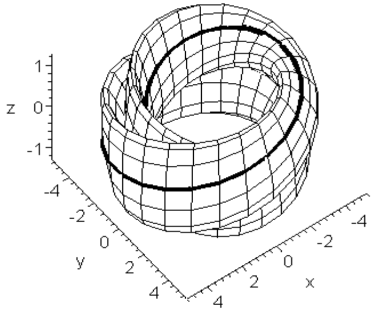

Рис. 6. Линяя края $v = \dfrac{\pi}{2}$

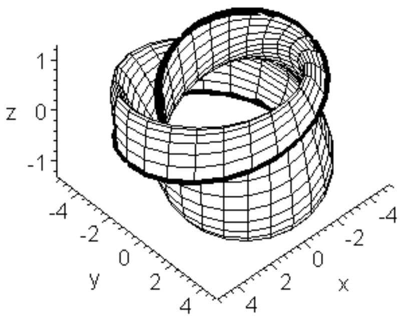

Рис. 7. «Верхняя половина»
бутылки Клейна

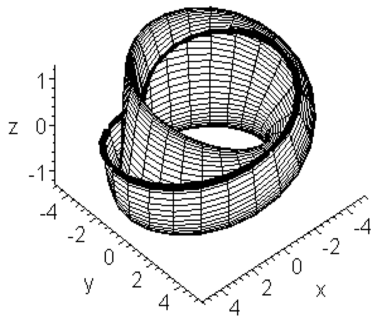

Рис. 8. «Нижняя половина»
бутылки Клейна

Рассмотрим вектор нормали вдоль средней линии

$$N = (\cos u\,(\sin\frac{u}{2} + 2\cos\frac{u}{2}), \sin u\,(\sin\frac{u}{2} + 2\cos\frac{u}{2}), -(\cos\frac{u}{2} - 2\sin\frac{u}{2})).$$

Имеем $N(u) = -N(u + 2\pi)$. Поверхность неориетируемая, односторонняя.

Используя математический пакет *Maple*, находим гауссову кривизну бутылки Клейна вдоль восьмерки:

$$K = \frac{1}{16}\frac{4a\cos\frac{u}{2} + 4(\cos\frac{u}{2})^2 - 3}{a^2 + 2\cos\frac{u}{2} + (\cos\frac{u}{2})^2}.$$

График гауссовой кривизны вдоль линии края при $a = 4, u = 0,...,4\pi$, $v = \dfrac{\pi}{2}$ имеет вид, показанный на рисунке 9, а гауссовой кривизны бутылки Клейна при $a = 4$ имеет вид, изображенный на рисунке 10.

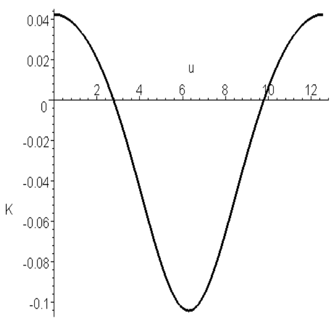

Рис. 9. Кривизна края

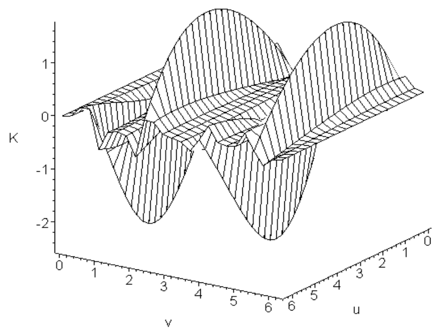

Рис. 10. Кривизна бутылки Клейна

Гауссова кривизна вдоль средней линии равна $K = -\dfrac{5}{4}$.

Список литературы

1. *Васильев А. Н.* Maple 8. М.; СПб.; Киев. 2003

2. *Чешкова. М. А.* О листе Мебиуса // Вестник Барнаульского гос. пед. университета. 2006. Вып. 6. С. 83—86.

M. Cheshkova

TO GEOMETRIES OF KLEIN BOTTLE

In Euclidean space is studied Klein bottle. In the process of study system computer mathematics *Maple* is used.

УДК 514.76

Ю. И. Шевченко

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ОБОБЩЕННАЯ СВЯЗНОСТЬ КАРТАНА

Введено понятие главного расслоения с полуприкле иванием к базе. Прием Лумисте задания фундаментально-групповой связности в главном расслоении распространен на полуприклеенное главное расслоение. Это привело к обобщению связности Картана. Найдены дифференциальные уравнения объекта этой связности, структурные уравнения форм связности и выражения компонент объекта кривизны-кручения. Определен тензор невырожденности, обращение которого в нуль превращает обобщенную связность в фундаментально-групповую связность. Доказано, что объект кривизны-кручения обобщенной связности Картана образует геометрический объект вместе с тензором невырожденности.