УДК 517.958:532/533

А. А. Юрова

ЭКСУЛЬТОНОПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ И ДВЕ ФАЗЫ КОЛЛАПСА ЛИНЗ ИНТРУЗИИ

Показано, что, используя эксультоноподобные решения нелинейного уравнения Шредингера, можно смоделировать эволюцию фронтальной завихренности внутритермоклинных линз в процессе их коллапса.

We show that it is possible to use the exulton-like solutions of the nonlinear Schrődinger equation to simulation of the evolution of frontal vortical zone of an intrathermocline eddies in the process of its collapse.

Ключевые слова: нелинейное уравнение Шредингера, эксультон, внутритермоклинные линзы.

Key words: nonlinear Schrodinger equation, exulton, intrathermocline eddies.

Как известно, если скорость вихревой нити направлена вдоль ее бинормали, то динамика такой нити может быть описана с помощью нелинейного уравнения Шрёдингера (НУШ).

$$i\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2}+2U^2U^*=0, \qquad (1)$$

где

$$U(t,\lambda)=2k(t,\lambda)\exp\left(i\left\{\int_0^{\lambda} dl\,\chi(t,l)+\frac{1}{2}\int_0^t dt A(t)\right\}\right), \qquad (2)$$

причем k и χ — кривизна и кручение, A — произвольная функция, λ — натуральный параметр, t — обезразмеренное время. Таким образом, любое точное решение уравнения (1) определяет динамику некоторой вихревой нити. Примеры солитонных нитей были построены и исследованы Хазимото.

В данной работе мы используем уравнение (1) для нахождения точных решений моделирующих коллапс вихревой нити, при котором она превращается в плоскую замкнутую кривую с постоянной кривизной и нулевым кручением, т.е. в окружность. Эти решения в дальнейшем можно отождествить с фронтальными завихренностями внутритермоклинных линз или их лабораторных аналогов.

Известно, что в океане существуют динамические образования, содержащие замкнутые вихревые трубки. Речь идет о фронтальной завихренности изолированных вихрей или внутритермоклинных линз. Это долгоживущие образования (время жизни до 10 лет), причем отношение характерного вертикального и горизонтального масштабов составляют $\sim 10^{-3}$. Несовпадение изобаро-изопикнических поверхностей обусловливает возникновение вертикальной завихренности, которая, в силу малости эффектов перемешивания, будет сосредоточена во фронтальной зоне и представляет собой исследуемую вихревую трубку. После образования линзы горизонтальный градиент давления сплющивает линзу по вертикали, приводя к ее растеканию по горизонтали. При этом фронтальная вихревая нить превращается в плоскую кривую. Поэтому описанные выше решения могут служить динамическими моделями, описывающими эволюцию фронтальной завихренности коллапсирующего субмезомасштабного когерентного вихря в некоторой системе отсчета. Более того, анализ натурных данных, равно как и лабораторное моделирование, продемонстрировало, что устойчивые линзы имеют форму окружности. Соответственно, если принять наше предположение о применимости нелинейного уравнения Шредингера (1) к описанию фазы коллапса линзы, то можно качественно описать свойства искомых решений уравнения (1), которые связаны с рассматриваемой нитью с помощью соотношения (2).

Первое, наиболее слабое свойство состоит в требовании использования периодических (по натуральному параметру решений), второе (динамическое) можно сформулировать в виде наличия асимптотических пределов (по переменной t) у кривизны и кручения, причем первая должна стремиться к положительной константе, а вторая к нулю. Действительно, второе условие гарантирует эволюцию первоначально сложной трехмерной вихревой нити в плоскую кривую, что естественно, если речь идет об описании фазы коллапса внутритермоклинного вихря. Первое же, при выполнении второго условия, есть просто математическое выражение того факта, что вихревая нить вырождается в окружность, что, как уже отмечалось, необходимо для согласования модели с натурными данными.

Точные решения НУШ могут быть найдены с помощью алгебраической техники Хироты и преобразований Дарбу — Матвеева — Салля. Общая схема построения этих решений основана на выражении для LA-пары НУШ:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = i\sigma_3 \Psi \Lambda + Q\Psi, \\
&\frac{\partial \Psi}{\partial t} = 2i\sigma_3 \Psi \Lambda^2 + 2Q\Psi\Lambda + W\Psi,
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

где

$$
Q = i\begin{pmatrix} 0 & \overline{U} \\ U & 0 \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ -\overline{\psi_2} & \overline{\psi_1} \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & \bar{l} \end{pmatrix}, W = \begin{pmatrix} -i|U|^2 & \frac{\partial \overline{U}}{\partial \lambda} \\ -\frac{\partial U}{\partial \lambda} & i|U|^2 \end{pmatrix},
$$

l — комплексный спектральный параметр, σ_3 — третья матрица Паули, черта означает комплексное сопряжение, λ — натуральный параметр. Модуль функции U пропорционален кривизне нити, а производная ее фазы по λ — ее кручению. Пусть Ψ_1 и Ψ_2 — решения системы (1) при некоторых фиксированных значениях спектрального параметра $(\Lambda_{1,2})$ и заданном потенциале Q.

Определим матричные функции $\tau_k = \Psi_k \Lambda_k \Psi_k^{-1}$, $k = 1,2$. Тогда прямой проверкой можно убедиться, что система (1) инвариантна относительно преобразования Дарбу:

$$
\Psi[1] = \Psi\Lambda - \tau\Psi, \_\, Q[1] = Q + i[\sigma_3, \tau], \_\, W[1] = W + 2[Q, \tau] + 2i[\sigma_3, \tau]\tau, \qquad (4)
$$

где квадратные скобки означают коммутатор, а в качестве τ можно выбрать либо τ_1, либо τ_2.

Используя (3), (4), можно построить периодическое по пространственной переменной решение, которое описывает замкнутую вихревую нить, с течением времени вырождающуюся в плоскую кривую постоянной кривизны, т. е. в окружность. Другой пример аналогичного решения дается формулой для кривизны:

$$
k = \sqrt{a^2 - \frac{4m^2 s^2 \left(+ \cosh(4bst)\cos(s\lambda) \right)}{\left(\_ \cosh(4bst) + m \_ \cos(s\lambda) \right)^2}}, \qquad (5)
$$

причем $s = \sqrt{a^2 - b^2}$, $m = bs / a$.

Кроме того, существуют решения, описывающие вырождение в плоскую кривую по более медленному, степенному закону (эксультон Итса — Салля — Рыбина). Все эти решения могут быть отождествлены с замкнутыми вихревыми нитями.

Отметим, что экспоненциальный характер коллапса, описываемого решением (5), согласуется с результатами лабораторных исследований Китамуры и Нагаты, изучавших раннюю стадию эволюции линзы. Как показано в экспериментальных работах Костяного — Шапиро, на второй фазе своего существования линза коллапсирует по степенному закону (это обстоятельство отмечено в работах Зацепина). Моделью этого процесса служит эксультон Итса — Салля — Рыбина.

Вместе с тем экспоненциальный характер коллапса должен проявляться лишь на ранней стадии эволюции линзы, а позднее он должен замедлиться так, что дальнейшее сплющивание вихря по вертикали будет уже описываться степенной функций, вид которой определялся в вышеупомянутой серии экспериментальных работ. Тем самым возникает задача построения решения, способного описывать обе фазы эволюции линзы.

Такое решение будет представлять собой суперпозицию описанных выше решений. Для получения явных выражений можно использовать обобщенные формулы Крама, но более удобно сформулировать формулы нелинейной суперпозиции, используя формализм преобразований Дарбу. Для получения последних следует учесть, что два последовательных преобразования Дарбу коммутируют. В частности, Q[1,2] = = Q[2,1]. В результате

$$U_3 = \frac{1}{2}(U_1 + U_2) + U_{\text{int}},$$

где

$$U_{\text{int}} = \frac{1}{|\beta_1 - \beta_2|^2 + |U_1 - U_2|^2} \times (\overline{\beta}_1 - \overline{\beta}_2)^2 (U_1 + U_2 - 2U) +$$

$$+ (U_1 - U_2)^2 (\overline{U_1 + U_2 - 2U}) - 2(\overline{\beta_1^2 - \beta_2^2})(U_1 - U_2),$$

$$\beta_k = -i \frac{U \overline{w}_k - \overline{U}_k w_k}{|U_k|^2 - |U|^2}, \quad w_k = \frac{\partial (U_k - U)}{\partial \lambda}.$$

Можно подобрать параметры так, что на малых временах будет доминировать экспоненциальная зависимость от времени. При больших определяющим становится второе решение, которое приводит к степенному закону для коллапса. Таким образом, получается обобщенная модель для коллапсирующей вихревой нити, включающей в себя начальную — экспоненциальную стадию и позднюю — степенную.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №09-05-00446ba и внутреннего исследовательского гранта ФГОУ ВПО «КГТУ».

Список литературы

1. *Гриценко В.А., Юрова А.А.* К вопросу о динамике вихревой нити // Интрузионные течения: теория и эксперимент. Калининград, 1997. С. 102—111.

2. *Yurova A.A., Gritsenko V.A.* Novel Exact Solutions Describing the Evolution of Lenses Frontal Vorticity. Oceanic Fronts and Related Phenomena. Konstantin Fedorov Memorial Sympozium. 18—22 May 1998, Pushkin, St.-Petersburg. Abstracts of the reports. St. Petersburg, RSHMU Publishers, 1998. P. 203.

3. *Matveev V.B., Salle M.A.* Darboux Transformation and Solitons Berlin — Heidelberg: Springer Verlag, 1991.

4. *Ablowitz M.J., Herbst B.M.* // SIAM J. Appl. Math. 1990. V. 50, №2. P. 339.

5. *Dugan J.P.* et al. // J. Geophys. Res. 1982. V. 87 №61. P. 385.

6. *Kostyanoy A.G., Rodionov V.G.* Coastle Upwelling Zones — a Source of Intrathermocline Eddy Formation, in Intrathermocline Eddies in the Ocean (Academy of sciences of the USSR: P.P. Shirshov institute of oceanology, Moscow). 1986.

7. *Armi L., Zenk W.* // J. Phys. Ocean. 1984. V. 14, №10. P. 1560.

8. *Kitamura Yo, Nagata Yu.* // J. of the Ocean. Sosiet. of Japan. 1983. V. 39. P. 89.

9. *Zatsepin A.G.* 1986 Laboratory Experiments with Density Lenses in a Rotating Fluid in Intrathermocline Eddies in the Ocean (Academy of sciences of the USSR: P.P. Shirshov institute of oceanology, Moscow).

10. *Hasimoto H.J.* Fluid Mech. 1972. V. 51. P. 477.

Об авторе

А.А. Юрова — канд. физ.-мат. наук, доц., КГТУ.

Author

A. Yurova — Dr., Kaliningrad State University of Technology.