УДК 514.74

А. В. Столяров

(Чувашский государственный педагогический университет, г. Чебоксары)

ЗАМЕЧАНИЯ К СТАТЬЕ К. В. ПОЛЯКОВОЙ «ОБОБЩЕНИЕ ВНЕШНЕГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА С ПОМОЩЬЮ ВИРТУАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ»

Приведен ряд замечаний к статье К. В. Поляковой «Обобщение внешнего дифференциала с помощью виртуальной функции» [5].

Ключевые слова: исчисление Э. Картана, конечные непрерывные группы Ли, метод продолжений и охватов Г. Ф. Лаптева.

Замечание 1. Известно [1; 4; 6], что к некоторой области F всех аналитических функций от n независимых переменных $x^1,\dots,x^n$ (в частности, к области всех непрерывных функций от n независимых переменных x^i с непрерывными первыми частными производными) присоединяется n символов $u^i = dx^i;$ тогда внешние формы степени p кольца $\Re[\mathrm{u}]$ обратятся во внешние дифференциальные формы степени p кольца дифференциалов $\Re[dx]$:

$$\overset{p}{\omega} = a_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \tag{1}$$

где $a_{i_1\dots i_p} = a_{i_1\dots i_p}(x^j),$ причем индексы принимают следующие значения: $i_1, i_2, \dots, j = \overline{1,n}$.

В рецензируемой работе [5, с. 111] автор объяснения предполагает, что коэффициенты p-форм $\overset{p}{\omega}$ зависят от двух систем переменных, то есть $a_{i_1 \ldots i_p} = a_{i_1 \ldots i_p}(x^j, x^\xi)$, $\xi = \overline{n+1, n+s}$; этим автор предоставила право читателю самостоятельно трактовать геометрическую интерпретацию введения дополнительной системы переменных x^ξ.

Замечание 2. В работе [5, с. 112] строится отображение $D_{f\cdot}$, ставящее p-форме (1) (с коэффициентами $a_{i_1 \ldots i_p}(x^j, x^\xi)$) в соответствие $(p+1)$-форму $D_f \overset{p}{\omega}$ по закону

$$D_f \overset{p}{\omega} = D\overset{p}{\omega} + p\frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge \overset{p}{\omega}, \qquad (2)$$

где $D\overset{p}{\omega}$ — общепринятый символ внешнего дифференцирования [6] p-формы $\overset{p}{\omega}$, $f = f(x^i, x^\xi, x^\alpha)$, $\alpha = \overline{n+s+1, n+s+s_1}$; при этом функция f называется виртуальной, а отображение D_f — обобщенным внешним дифференциалом формы $\overset{p}{\omega}$. Как и выше, в работе система переменных x^α не находит своей трактовки.

В качестве примера для 1-формы $\omega = a_i dx^i$ показывается [5, с. 112] справедливость равенства

$$D_f \omega = D\omega + x_{ij} dx^i \wedge dx^j, \text{ где } x_{ij} = \frac{\partial f}{\partial x^i} a_j.$$

К сожалению, в этом примере не приведены подобные члены; на самом деле, должно быть $x_{ij} = \dfrac{\partial f}{\partial x^{[i}} a_{j]}$.

Замечание 3. Согласно ходу изложения работы [5], в отображении D_f (см. (2)) под p-формой $\overset{p}{\omega}$ понимается форма вида (1); следовательно, внешняя дифференциальная форма $\overset{p}{\omega}$ является p-формой относительно дифференциалов лишь n независимых переменных x^i.

На страницах 112—113 рассматриваются свойства 1^0—7^0 отображения D_f и приводятся их доказательства. В частности, свойство 5^0 утверждает, что если

$$\widetilde{\omega} = a_\xi dx^\xi, \text{ то } D_f\widetilde{\omega} = D\widetilde{\omega} = da_\xi \wedge dx^\xi; \tag{3}$$

относительно доказательства этого утверждения сказано, что свойство 5^0 очевидно (с. 113).

Возникают вопросы:

1. Почему в (3) берется форма $\widetilde{\omega} = a_\xi dx^\xi$, отличная от $\omega = a_i dx^i$? Этим автор противоречит себе, ибо нарушает закон отображения D_f (см. (2)). Если в (3) вместо формы $\widetilde{\omega} = a_\xi dx^\xi$ взять форму $\omega = a_i dx^i$ (что вполне допустимо), то, согласно замечанию 2, $D_f\omega = \ = da_k \wedge dx^k$ тогда и только тогда, когда $x_{ij} = \dfrac{\partial f}{\partial x^{[i}} a_{j]} \equiv 0$. Заметим, что последнее, вообще говоря, имеет место не для всякой функции *f*.

2. Если допустить (в нарушение всех соглашений), что в отображении D_f (см. (2)) вместо $\omega = a_i dx^i$ участвует форма Пфаффа $\widetilde{\omega} = a_\xi dx^\xi$, то имеем

$$D_f\widetilde{\omega} = D\widetilde{\omega} + \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \wedge \widetilde{\omega} = D\widetilde{\omega} + \Omega \wedge \widetilde{\omega}, \text{ где } \Omega = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j.$$

Так как автор уверяет, что свойство 5^0 очевидно, то, согласно этому заключению, должно быть $\Omega \wedge \widetilde{\omega} = 0$ (см. (3)). Последнее равносильно тому, что $dx^j \wedge dx^\xi = 0$. Где доказательство этого?

Имеются замечания к итогам доказательства свойств 6^0 и 7^0 [5, с. 113—114]; на наш взгляд, эти итоги должны иметь следующий вид (у автора они другие):

$$\text{— по свойству } 6^0\text{: } D_f(dg) = \frac{\partial f}{\partial x^{[i}} \cdot \frac{\partial g}{\partial x^{j]}} dx^i \wedge dx^j; \tag{4}$$

$$\text{— по свойству } 7^0\text{: } D_f(D_f\omega) = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial a_k}{\partial x^j}dx^{(i} \wedge dx^j \wedge dx^{k)} -$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x^{[i}}\frac{\partial a_{j]}}{\partial x^\xi}dx^i \wedge dx^j \wedge dx^\xi . \qquad (5)$$

Замечание 4. Всякая математическая теория создается для того, чтобы решить какую-то заранее поставленную задачу. Задача формулировалась на одном языке, как ее решить — мы не знаем. Тогда придумывается другой язык, переформулируется задача, и она, оказывается, проще решается на новом языке.

Когда мы выбираем те или иные задачи, придумываем языки для их решения и пытаемся потом оценивать, насколько они интересны и хороши, мы опираемся не только на собственное мнение, но и на мнение всего математического сообщества.

Прежде чем дать общую оценку работы [5], приведем краткий исторический обзор развития инвариантных методов в дифференциальной геометрии, связанных с исчислением Картана.

Метод внешних дифференциальных форм [1; 4; 6] (исчисление Картана) разработан в начале XX столетия французским математиком Эли Жозефом Картаном (1869—1951).

«Я хотел создать теорию, — пишет Э. Картан, — куда входили бы понятия и операции, независимые от всякой замены переменных; для этого было необходимо заменить частные производные дифференциалами, которые имеют внутреннее (инвариантное) значение. Я систематически изучал системы уравнений в частных производных в виде уравнений в полных дифференциалах, то есть в виде систем уравнений Пфаффа … »

Метод внешних дифференциальных форм Э. Картана уходит своими корнями и в алгебру, и в анализ и, быть может, в особенности, в теорию непрерывных групп преобразований [2] С. Ли.

После выхода в свет книги проф. С. П. Финикова [6] в научных статьях многочисленных авторов (Г. Ф. Лаптев, А. М. Васильев, М. А. Акивис, В. С. Малаховский и др.) нашло приложение метода внешних дифференциальных форм к разнообразным вопросам дифференциальной геометрии. Известно [1; 6], что в вопросах доказательства существования решения систем уравнений Пфаффа (приведение их в инволюцию) и произвольных систем внешних дифференциальных уравнений, а также в вопросах нахождения широты решения их исчисление Картана является незаменимым.

В середине XX в. выдающийся отечественный геометр Герман Федорович Лаптев (1909—1972) создал инвариантный аналитический теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований [3] (метод продолжений и охватов), который опирается на исчисление Картана и на теорию представлений конечных групп С. Ли. Универсальность теоретико-группового метода продолжений и охватов проф. Г. Ф. Лаптева заключается в том, что с использованием этого метода можно описать в инвариантной форме любые дифференциально-геометрические структуры на гладких многообразиях, а также разнообразные структуры математического анализа и математической физики.

Научными последователями Г. Ф. Лаптева, создавшими свои геометрические школы, по праву считаются профессора А. М. Васильев, В. С. Малаховский, Л. Е. Евтушик, Н. М. Остиану, В. Т. Базылев, М. А. Акивис, Ю. Г. Лумисте, В. Й. Близникас, К. Й. Гринцевичус и многие другие; в геометрии они сделали очень много по развитию и совершенствованию идей и методов Г. Ф. Лаптева.

Вернемся к оценке работы [5]. Прежде всего, к автору этой статьи напрашиваются следующие вопросы[1].

[1] На некоторые из этих вопросов отвечает статья К.В. Поляковой «Обобщенные дифференциал и его применение» (в сборнике тезисов докладов Международной конференции "Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation", p. 106 – 107).

1. Какая реальная задача подтолкнула автора к тому, чтобы для ее решения создать новый язык — обобщение внешнего дифференциала с помощью виртуальной функции? В чем преимущество этого языка по сравнению с существующими методами?

2. Каковы основы новой теории? Например, как формулируются следующие предложения: аналог леммы Картана; продолжение уравнений Пфаффа; правильно продолжаемые системы дифференциальных уравнений; аналог теоремы Фробениуса; приведение системы уравнений Пфаффа в инволюцию, нахождение широты ее решения; аналог теоремы Картана — Лаптева (относительно связности в расслоенном многообразии).

3. При новом языке автора теорема Пуанкаре, вообще говоря, неверна (см. (4), (5)); последнее ставит под сильное сомнение (как и п. 2) эффективность и целесообразность нового языка.

Вывод: новый язык [5] — *обобщение внешнего дифференциала с помощью виртуальной функции* — является упражнением автора ради упражнения.

Список литературы

1. *Картан Э.* Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М., 1962.

2. *Картан Э.* Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера. М., 1963.

3. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. М., 1953. Т. 2. С. 275—382.

4. *Малаховский В. С.* Введение в теорию внешних форм: учебное пособие. Ч. 1. Калининград, 1978.

5. *Полякова К. В.* Обобщение внешнего дифференциала с помощью виртуальной функции. // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 41. Калининград, 2010. С. 111—117.

6. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л., 1948.

A. Stolyarov

REMARKS TO ARTICLE OF K. POLYAKOVA «GENERALIZATION OF EXTERIOR DIFFERENTIAL BY MEANS OF VIRTUAL FUNCTION»

Some comments on the article of K. Polyakova «Generalization of exterior differential by means of virtual function» are given.

УДК 514.764.3

А. В. Христофорова

(Чувашский государственный педагогический университет, г. Чебоксары)

ДВОЙСТВЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Работа посвящена двойственной геометрии нормальных связностей, индуцируемых на нормализованной гиперповерхности в пространстве аффинной связности.

Ключевые слова: нормальная связность, гиперповерхность, пространство аффинной связности.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$I, J, L, K, T, S = \overline{1,n};\ \bar{I}, \bar{J} = \overline{0,n};\ i, j, l, k, t, s = \overline{1,n-1}.$$

Рассмотрим пространство аффинной связности $A_{n,n}$, заданное системой $n(n+1)$ форм Пфаффа $\{\theta^I, \theta^I_K\}$, подчиненных структурным уравнениям [1]