Следовательно, группа автоморфизмов $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{z^1 = 0\}$ вида $(z^1, z') \to (z^1, Az')$, где A невырожденная матрица размерности $n \times n$, поднимается с помощью диаграммы (1) до группы G автоморфизмов многообразия N. По уже упомянутой теореме Кодаиры многообразие $\dot{-}kE \setminus M$ вкладывается в некоторое комплексное евклидово пространство $\mathbb{C}^{\ell}$ для достаточно большого k. Пусть $d: -E \setminus M \to kE \setminus M$ означает естественное k-листное накрытие. Рассмотрим любой элемент $g \in G$ и заметим, что отображение $d \circ g: N \to -kE \setminus d(P) \cup M$ записывается в виде набора $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\ell)$ голоморфных функций на N. По теореме Римана функции σ_j и отображения g, g^{-1} продолжаются на аналитическое подмножество P. Таким образом, построена группа $\tilde{G}$ биголономных преобразований многообразия $-E \setminus M$, изоморфная $GL(n, \mathbb{C})$.

Из коммутативности диаграммы (I) вытекает, что любой элемент $\tilde{g} \in \tilde{G}$ индуцирует послойное преобразование $-E \setminus M$ и поэтому естественно определяет биголоморфное отображение $\varphi = \varphi(\tilde{g}) \in Aut(M)$. Группа $\varphi(\tilde{G})$ также изоморфна $GL(n, \mathbb{C})$.

Нетрудно показать, что структура комплексной группы, вводимая таким образом на $\varphi(\tilde{G})$, согласована с компактно открытой топологией.

Итак,
$$Im\,\varphi \cong GL(n, \mathbb{C}).$$

Библиографический список

1. Г р и ф ф и т с Ф., Х а р р и с Дж. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982. Т. 1. 496 с.

2. Г а н н и н г Р., Р о с с и Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969. 395 с.

УДК 514.75

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС ФИГУРЫ В ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ СВЯЗНОСТИ

Ю.И. Ш е в ч е н к о
(Калининградский университет)

С помощью ковариантного дифференциала геометрического объекта относительно связности главного расслоения введено понятие параллельного переноса фигуры в линейной комбинации связности. Примером такого переноса на поверхности проективного пространства является смещение плоскости Картана в гиперплоскости, натянутой на эту плоскость и нормаль второго рода А.П. Нордена.

Предварительно изложим понятие ковариантного дифференциала геометрического объекта относительно связности главного расслоения с помощью способа Лаптева задания связности в этом расслоении. Такое изложение можно считать 4-м способом определения ковариантного дифференциала [5]. Рассмотрим главное расслоение $G_r(M_n)$, базой M_n которого является окрестность точки p n-мерного дифференцируемого многообразия, а типовым слоем — r-членная группа Ли G_r. Это расслоение имеет структурные уравнения [1, с.51]:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j \quad (i,j = \overline{1,n}\ ;\ \alpha,\beta,\gamma = \overline{n+1, n+r}),$$

$$d\omega^\alpha = \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma}\, \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^i \wedge \omega^\alpha_i.$$

Связность в расслоении $G_r(M_n)$ задается [1, с.62, 82] с помощью форм $\tilde{\omega}^\alpha = \omega^\alpha - \Gamma^\alpha_i\, \omega^i$, где Γ^α_i — некоторые функции. Дифференцируя формы $\tilde{\omega}^\alpha$ внешним образом, получим

$$d\tilde{\omega}^\alpha = \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma}\, \tilde{\omega}^\beta \wedge \tilde{\omega}^\gamma - \frac{1}{2} C^\alpha_{\beta\gamma} \Gamma^\beta_i \Gamma^\gamma_j\, \omega^i \wedge \omega^j +$$
$$+ \omega^i \wedge (d\Gamma^\alpha_i - \Gamma^\alpha_j \omega^j_i + \Gamma^\beta_i C^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\gamma + \omega^\alpha_i),$$

откуда в силу теоремы Картана-Лаптева находим уравнения на компоненты объекта связности

$$d\Gamma^\alpha_i-\Gamma^\alpha_j\omega^j_i+\Gamma^\beta_i C^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\gamma+\omega^\alpha_i=\Gamma^\alpha_{ij}\omega^j. \qquad (1)$$

Структурные уравнения для форм связности $\tilde\omega^\alpha$ принимают вид

$$d\tilde\omega^\alpha=\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\tilde\omega^\beta\wedge\tilde\omega^\gamma+R^\alpha_{ij}\,\omega^i\wedge\omega^j,$$

причем компоненты объекта кривизны выражаются по формулам

$$R^\alpha_{ij}=\Gamma^\alpha_{[ij]}-\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}\Gamma^\beta_{[i}\Gamma^\gamma_{j]},$$

где квадратные скобки обозначают альтернирование.

Пусть в расслоении $G_r(M_n)$ задано поле геометрического объекта λ^a:

$$d\lambda^a+f^a_\alpha(\lambda^b)\omega^\alpha=\lambda^a_i\,\omega^i \qquad (a,b=\overline{1,m}). \qquad (2)$$

Вводя формы связности в эти уравнения, получим $\Delta\lambda^a=\tilde\lambda^a_i\omega^i$, где выражения

$$\Delta\lambda^a=d\lambda^a+f^a_\alpha(\lambda^b)\tilde\omega^\alpha,$$
$$\tilde\lambda^a_i=\lambda^a_i-f^a_\alpha(\lambda^b)\Gamma^\alpha_i$$

называются ковариантным (абсолютным) дифференциалом и ковариантными производными объекта λ^a относительно связности Γ^α_i.

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (2), получим

$$(d\lambda^a_i-\lambda^a_j\omega^j_i+\lambda^b_i f^a_{\alpha b}\omega^\alpha+f^a_\alpha\omega^\alpha_i)\wedge\omega^i+$$
$$+(f^b_\beta f^a_{\gamma b}-\frac{1}{2}C^\alpha_{\beta\gamma}f^a_\alpha)\,\omega^\beta\wedge\omega^\gamma=0, \qquad (3)$$

где

$$f^a_\alpha=f^a_\alpha(\lambda^b), \quad f^a_{\alpha b}=\frac{\partial f^a_\alpha}{\partial\lambda^b}.$$

Из уравнений (3) следует, что система уравнений (2) продолжаема при выполнении уравнений Ли для объекта λ^a (см., например, [2, с. 181]):

$$f^b_{[\beta}f^a_{\gamma]b}-\frac{1}{2}C^\alpha_{[\beta\gamma]}f^a_\alpha=0,$$

тогда

$$d\lambda^a_i-\lambda^a_j\omega^j_i+\lambda^b_i f^a_{\alpha b}\omega^\alpha+f^a_\alpha\omega^\alpha_i=\lambda^a_{ij}\omega^j. \qquad (4)$$

При выполнении уравнений Ли внешние дифференциалы форм $\Delta\lambda^a$ преобразуются к виду

$$d\Delta\lambda^a=\Delta\lambda^b\wedge f^a_{\alpha b}\tilde\omega^\alpha+f^a_\alpha R^\alpha_{ij}\,\omega^i\wedge\omega^j. \qquad (5)$$

Зададим линию $\ell: p\in\ell\subset M_n$ уравнениями $\omega^i=\rho^i\omega$, где параметрическая форма ω удовлетворяет внешнему уравнению $d\omega=\omega\wedge\omega_1$, которое позволяет найти дифференциальные уравнения коэффициентов ρ^i:

$$d\rho^i+\rho^j\omega^i_j-\rho^i\omega_1=\rho^i_1\,\omega.$$

Из уравнений (5) видно, что вдоль линии ℓ система уравнений $\Delta\lambda^a=0$ вполне интегрируема.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что фигура Φ, заданная геометрическим объектом λ^a, переносится параллельно в связности Γ^α_i вдоль линии ℓ, если вдоль нее ковариантный дифференциал $\Delta\lambda^a$ обращается в нуль.

Условия параллельного переноса имеют вид $\Delta\lambda^a|_\ell=0$ или $\tilde\lambda^a_i\rho^i=0$. Последние уравнения представляют из себя систему m линейных однородных уравнений с n неизвестными ρ^i. Из этой системы следует, что линия ℓ определяется с произволом ∞^{n-h-1}, где $h=\operatorname{rang}(\tilde\lambda^a_i)$, т.е. существует такое $(n-h)$-мерное подпространство T_{n-h} касательного к многообразию в точке p пространства T_n, что вдоль линий ℓ, касающихся подпространства T_{n-h}, можно переносить параллельно фигуру Φ. Отметим три крайних случая: 1) $h=0\Rightarrow T_{n-h}=T_n$, т.е. фигура Φ переносится абсолютно параллельно; 2) $h=n\le m\Rightarrow T_{n-h}=p$, т.е. поле фигур Φ абсолютно непараллельно; 3) $h=m<n\Rightarrow T_{n-h}=T_{n-m}$, т.е. так же, как и в общем случае, есть кривые, вдоль которых можно осуществить параллельный перенос фигуры Φ, и кривые, вдоль которых этого сделать нельзя.

Из уравнений (1), (4) найдем уравнения на ковариантные производные

$$d\tilde\lambda^a_i-\tilde\lambda^a_j\omega^j_i+\tilde\lambda^b_i f^a_{\alpha b}\omega^\alpha={}'\lambda^a_{ij}\,\omega^j,$$

где

$$'\lambda^a_{ij} = \lambda^a_{ij} - f^a_\alpha \Gamma^\alpha_{ij} - f^a_{\alpha b} \lambda^b_j \Gamma^\alpha_i$$

Откуда видно, что ковариантные производные $\tilde{\lambda}^a_i$ образуют псевдотензор, т.е. объект, вообще говоря, не являющийся геометрическим объектом, обращение которого в нуль имеет инвариантный смысл. Равенства $\tilde{\lambda}^a_i = 0$, соответствующие случаю абсолютного параллелизма, запишем в виде

$$f^a_\alpha \Gamma^\alpha_i = \lambda^a_i . \qquad (6)$$

Эту систему можно рассматривать как систему mn линейных неоднородных уравнений с rn неизвестными Γ^α_i. При ее решении возможны три случая: а) противоречие – фигура Φ не может переноситься абсолютно параллельно ни в какой связности; б) единственное решение – объект связности Γ^α_i выражается через объект λ^a и его продолжение λ^a_i, т.е. существует единственная связность, в которой фигура Φ переносится абсолютно параллельно; в) бесчисленное множество решений – существует бесконечное множество связностей, в которых поле фигур Φ абсолютно параллельно. На систему уравнений (6) можно смотреть иначе, как на систему, определяющую продолжение λ^a_i объекта λ^a, тогда имеет место

Т е о р е м а. Для заданной связности в главном расслоении $G_r(M_n)$ любую фигуру Φ можно включить в абсолютно параллельное относительно этой связности поле на базе M_n.

О п р е д е л е н и е 2. Пусть компоненты геометрического объекта λ^a разбиты на два подобъекта λ^{a_1}, λ^{a_2}, тогда под параллельным переносом фигуры Φ в линейной комбинации связности Γ^α_i вдоль линии ℓ будем понимать такое ее смещение, при котором некоторая линейная комбинация ковариантных дифференциалов подобъектов $\Omega^{a_1} = \Delta\lambda^{a_1} + \lambda^{a_1}_{a_2} \Delta\lambda^{a_2}$ обращается в нуль, причем система уравнений $\Omega^{a_1}|_\ell = 0$ вполне интегрируема.

П р и м е р. В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрим m-поверхность X_m как многообразие центрированных касательных плоскостей. Из работ [3], [4] следует, что ковариантные дифференциалы компонент оснащающего квазитензора $\lambda = (\lambda^i_a, \lambda_a, \lambda_i)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} d\Delta\lambda^i_a = \tilde{\omega}^b_a \wedge \Delta\lambda^i_b + \Delta\lambda^j_a \wedge \tilde{\omega}^i_j + S^i_{ajk}\, \omega^j \wedge \omega^k, \\ d\Delta\lambda_a = \tilde{\omega}^b_a \wedge \Delta\lambda_b + \Delta\lambda^i_a \wedge \tilde{\omega}_i + S_{aij}\, \omega^i \wedge \omega^j, \\ d\Delta\lambda_i = \tilde{\omega}^j_i \wedge \Delta\lambda_j + S_{ijk}\, \omega^j \wedge \omega^k, \end{cases} \qquad (7)$$

где

$$S^i_{ajk} = R^i_{ajk} - \lambda^i_b R^b_{ajk} + \lambda^\ell_a R^i_{\ell jk},$$

$$S_{aij} = R_{aij} - \lambda_b R^b_{aij} + \lambda^k_a R_{kij},$$

$$S_{ijk} = R_{ijk} - \lambda_\ell R^\ell_{ijk} \quad (i,j,k,\ell = \overline{1,m};\ a,b,c = \overline{m+1,n}),$$

а выражения компонент объекта кривизны

$$R = (R^\ell_{ijk}, R_{ijk}, R^b_{aij}, R^i_{ajk}, R_{aij})$$

связности в ассоциированном с поверхностью X_m расслоении [3, с.139] здесь не потребуется. Из уравнений (7) видно, что три системы уравнений: 1) $\Delta\lambda_i = 0$, 2) $\Delta\lambda^i_a = 0$, 3) $\Delta\lambda_a = 0$, $\Delta\lambda^i_a = 0$ – вполне интегрируемы вдоль линий на поверхности X_m. Соответствующие параллельные переносы описаны в работе [4, с.128], из которой вытекают формулы для дифференциалов базисных точек B_a плоскости Картана P_{n-m-1}:

$$dB_a = (\ldots)^b_a B_b + \Delta\lambda^i_a B_i + \Omega_a A \quad (\Omega_a = \Delta\lambda_a - \lambda_i \Delta\lambda^i_a),$$

где B_i – базисные точки нормали второго рода P_{m-1} А.П.Нордена. Из системы (7) получим, что формы Ω_a подчинены уравнениям

$$d\Omega_a = \tilde{\omega}^b_a \wedge \Omega_b + (\lambda^k_{ai} \lambda_{kj} + S_{aij} - \lambda_k S^k_{aij})\, \omega^i \wedge \omega^j,$$

т.е. имеется возможность параллельного переноса плоскости P_{n-m-1} в линейной комбинации связности

$$\Gamma = (\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^i_{aj}, \Gamma_{ai}),$$

состоящего в смещении плоскости Картана внутри гиперплоскости $P_{n-1} = P_{n-m-1} + P_{m-1}$. Уравнения параллельного переноса имеют вид $(\tilde{\lambda}_{ai} - \lambda_j \tilde{\lambda}^j_{ai})\rho^i = 0$, откуда следует, что в случае полного ранга $(n-m) \times m$ -матрицы $(\tilde{\lambda}_{ai} - \lambda_j \tilde{\lambda}^j_{ai})$ при $m < n < 2m$

параллельный перенос в линейной комбинации связности Γ осуществить можно, а при $n \geq 2m$ -нельзя.

В рассмотренном примере система уравнений (6) принимает вид:

$$\Gamma_{ij} - \lambda_k \Gamma^k_{ij} = \lambda_{ij}, \quad \Gamma_{ai} - \lambda_b \Gamma^b_{ai} + \lambda^j_a \Gamma_{ji} = \lambda_{ai},$$

$$\Gamma^i_{aj} + \lambda^k_a \Gamma^i_{kj} - \lambda^i_b \Gamma^b_{aj} = \lambda^i_{aj},$$

что соответствует случаю в) -бесконечного множества связностей Γ, в которых поле пар плоскостей (P_{n-m-1}, P_{m-1}) абсолютно параллельно. Из этого множества можно выделить одну связность следующим образом. Пользуясь охватами компонент Γ^i_{jk}, Γ^a_{bi} из работы [3, с.141], выразим остальные компоненты:

$$\Gamma_{ij} = \lambda_{ij} + \lambda_k \lambda^k_a \Lambda^a_{ij} - 2\lambda_i \lambda_j,$$

$$\Gamma^i_{aj} = \lambda^i_{aj} + \lambda^k_a (\delta^i_j \lambda_k - 2\lambda^i_b \Lambda^b_{jk}),$$

$$\Gamma_{ai} = \lambda_{ai} - \lambda_a \lambda_i + \lambda^j_a (2\lambda_i \lambda_j - \lambda_{ji}) - \lambda^j_a \Lambda^b_{ij} (\lambda_b + \lambda_k \lambda^k_b).$$

Эти формулы дают другое доказательство леммы 1 в [3].

Библиографический список

1. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях //Проблемы геометрии/ ВИНИТИ АН СССР.М.,1979.Т.9.С.5-247.

2. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве//Тр. геометр.семинара/ ВИНИТИ АН СССР.М.,1969.Т.2.С.179-206.

3. Ш е в ч е н к о Ю.И. Об оснащении многомерной поверхности проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1977.Вып.8.С.135-150.

4. Ш е в ч е н к о Ю.И. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград,1981.Вып.12.С.126-130.

5. Kolář J. On the absolute differentiation of geometric object fields : Ann. pol. math., 1973. V.27, №3. P.293-304.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.18 1987

ВВЕДЕНИЕ ПРОЕКТИВНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ В ПОДРАССЛОЕНИЯХ $M(\Lambda)$-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Н.М.Ш е й д о р о в а
(Калининградский университет)

В работе исследованы возможности введения связностей в многообразии P°-структуры, ассоциированном с двухсоставным распределением $M(\Lambda)$ проективного пространства P_n [3]. Распределение r-мерных линейных элементов Λ можно трактовать как Λ-подрасслоение в многообразии P°-структуры. M-расслоение, в каждом слое которого задана плоскость $\Lambda \subset M$, будем называть $M(\Lambda)$-подрасслоением в многообразии P°-структуры, или многообразием $P^\circ(M(\Lambda))$. Используется следующая схема индексов:

$\bar I, \bar J, \bar K, \bar L = \overline{0,n}$; $I, J, K, L = \overline{1,n}$; $\bar p, \bar q, \bar s = \overline{0,r}$; $p, q, s, t = \overline{1,r}$; $u, v = \overline{r+1,n}$.

Оператор ∇ определим формулой, введенной в работе [1].

1. Согласно теореме Картана-Лаптева, формы $\omega^{\bar K}_{\bar I}$ в слоях многообразия $P^\circ(M(\Lambda))$ тогда и только тогда будут определять проективную связность, когда они будут удовлетворять следующим структурным уравнениям [1]:

$$D\omega^{\bar K}_{\bar I} = \omega^{\bar J}_{\bar I} \wedge \omega^{\bar K}_{\bar J} + R^{\bar K}_{\bar I JL}\, \omega^J_0 \wedge \omega^L_0 \qquad (1)$$

Будем считать, что реперы адаптированы Λ-подрасслоению. Формы $\omega^{\bar q}_{\bar p}$ не удовлетворяют уравнениям вида (1), но если ввести формы

$$\hat\omega^{\bar q}_{\bar p} = \omega^{\bar q}_{\bar p} - \gamma^{\bar q}_{\bar p K}\, \omega^K_0 \qquad (2)$$

и потребовать, чтобы функции $\gamma^{\bar q}_{\bar p K}$ удовлетворяли уравнениям

$$\nabla \gamma^{\bar q}_{\bar p K} + \Lambda^u_{\bar p K}\, \omega^{\bar q}_u - \gamma^{\bar s}_{\bar p K} \gamma^{\bar q}_{\bar s J}\, \omega^J_0 = \gamma^{\bar q}_{\bar p K J}\, \omega^J_0, \qquad (3)$$

где $\Lambda^u_{0K} = \delta^u_K$; Λ^u_{pK} -компоненты фундаментального объекта [3] Λ-распределения, т.е. задать поле объекта $\gamma = \{\gamma^{\bar q}_{\bar p K}, \Lambda^u_{\bar p K}\}$, то формы (2) будут удовлетворять уравнениям вида (1) и, следовательно, определять в слоях Λ-расслоения проективную связность γ.