Обращение в ноль первого сомножителя является условием распадения фокусной кривой. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 9. Любая сеть двумерной неминимальной поверхности в E_4 в точках, где фокусная кривая распадается, имеет прямые псевдофокусов, совпавшие между собой. В точках, где фокусная кривая не распадается, таких сетей нет.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве // Лит. мат. сб. 1966. Т.4. № 4. С.475-491.

2. Г л о в а Н.И. К проективной дифференциальной геометрии двумерного распределения в четырехмерном пространстве // Укр. геометр. сб. 1978. Вып.21. С.21-30.

3. Г л о в а Н.И. К теории кривизны системы интегральных кривых двух уравнений Пфаффа в E_4 // Укр. геометр. сб. 1975. Вып.18. С.37-48.

4. Г л о в а Н.И. К теории кривизны двумерного распределения четырехмерного евклидова пространства // Укр. геометр. сб. 1981. Вып.26. С.30-40.

5. Г л о в а Н.И., У с у б а л и е в а А.С. К теории кривизны оснащенных распределений Δ_2 в E_4 // Укр. геометр. сб. 1988. Вып.31. С.26-36.

УДК 514.75

О ГИПЕРРАСПРЕДЕЛЕНИЯХ НА $V_p \subset E_{p+2}$

В.А.Е с и н

(Белгородский педагогический институт)

В работе рассматриваются гиперраспределения на поверхности $V_p \subset E_{p+2}$, инвариантно связанные с полем вектора данной нормали. Находятся условия интегрируемости этих распределений.

Поверхность $V_p \subset E_{p+2}$ отнесем к подвижному реперу

$$R = (x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha),\quad i,j,k = 1,\dots,p;\quad \alpha,\beta = p+1, p+2,$$

где орты $\vec{e}_i$ принадлежат касательному пространству $T_x(V_p)$ к поверхности V_p в точке x, а векторы $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис нормальной плоскости $N_2(x)$. Инфинитезимальные перемещения такого репера определяются уравнениями

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i,\quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^\alpha \vec{e}_\alpha,\quad d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^i \vec{e}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta \qquad (1)$$

Продолжая систему $\omega^\alpha = 0$ дифференциальных уравнений нашей поверхности, получим

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j,\quad b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha, \qquad (2)$$

где b_{ij}^α - второй основной тензор поверхности. Функции $\gamma_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$ - компоненты метрического тензора поверхности $V_p \subset E_{p+2}$, γ^{ij} - контравариантные компоненты этого тензора. При этом

$$d\gamma_{ij} = \gamma_{ik}\omega_j^k + \gamma_{jk}\omega_i^k,\qquad d\gamma^{ij} = -\gamma^{ik}\omega_k^j - \gamma^{jk}\omega_k^i. \qquad (3)$$

Тождества $\vec{e}_i \vec{e}_\alpha = 0$, $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ приводят к соотношениям

$$\omega_\alpha^k + \gamma^{ki}\omega_i^\alpha = 0,\quad \omega_\alpha^\beta + \omega_\beta^\alpha = 0.$$

Пусть на $V_p \subset E_{p+2}$ задано поле нормальных векторов $\vec{n}$. Орт $\vec{e}_{p+2}$ репера направим по вектору $\vec{n}$ (в дальнейшем считаем, что $\vec{n} \parallel \vec{e}_{p+2}$). Тогда форма ω_{p+1}^{p+2} будет главной

$$\omega_{p+1}^{p+2} = c_i \omega^i, \qquad (4)$$

а величины b_{ij}^{p+1}, b_{ij}^{p+2} будут координатами двухвалентных тензоров.

Рассмотрим гиперсферическое изображение $\widetilde{V}_p$ поверхности $V_p \subset E_{p+2}$ с помощью орта $\vec{e}_{p+2}$ данной нормали. Имеем

$$d\vec{e}_{p+2} = \omega_{p+2}^i \vec{e}_i + \omega_{p+2}^{p+1}\vec{e}_{p+1} = (-\gamma^{ij} b_{jk}^{p+2}\vec{e}_i - c_k \vec{e}_{p+1})\omega^k = \vec{a}_k \omega^k,$$

где $\vec{a}_k$ - векторы, касательные к линиям ω^k гиперсферического изображения $\widetilde{V}_p$.

В нормальной плоскости $\widetilde{N}_2$ к гиперсферическому изображению V_p инвариантно определены два вектора $\vec{a}_{p+2} = \vec{e}_{p+2}$ и $\vec{a}_{p+1} = c_i b_{p+2}^{ij}\vec{e}_j - \vec{e}_{p+1}$. Вектор $\vec{a}_{p+1}$ принадлежит касательному пространству к гиперсфере $S_{p+1} \supset \widetilde{V}_p$. Здесь $b_{p+2}^{ij} b_{jk}^{p+2} = \delta_k^i$ и предполагается, что $\det\|b_{ij}^{p+2}\| \neq 0$.

Пусть

$$\vec{q} = \Pi_{T_x}\vec{a}_{p+1} = c_i b_{p+2}^{ij}\vec{e}_j.$$

Рассмотрим векторы Родрига [2] для направления $\vec{q}$ и ортов $\vec{e}_{p+1}$ и $\vec{e}_{p+2}$:

$$\vec{f} = \vec{\tau}_q^{\,p+1} = \gamma^{ik} b_{kj}^{p+1} c_t b_{p+2}^{tj}\vec{e}_i,$$

$$\vec{p} = \vec{\tau}_q^{\,p+2} = \gamma^{ik} b_{kj}^{p+2} c_t b_{p+2}^{tj}\vec{e}_i = c^i \vec{e}_i$$

Обозначим $\Delta_{p-1}^q(x), \Delta_{p-1}^f(x), \Delta_{p-1}^p(x)$ - площадки, ортогональные к $\vec{q}, \vec{f}, \vec{p}$ соответственно. Таким образом, на поверхности $V_p \subset E_{p+2}$

имеем три распределения Δ^q_{p-1}, Δ^f_{p-1}, Δ^p_{p-1}.

Распределение Δ^p_{p-1} определяется ковектором $s_i=\gamma_{ij}c^j$. Есл[и] орт $\vec e_p$ репера направим по $\vec p$, а орты $\vec e_a \perp \vec e_p$ $(a=\overline{1,p-1})$, то $c_k=\lambda\gamma$ и $c_a=0$, а тогда вдоль $\Delta^p_{p-1}(x)$ будет

$$d\vec e_{p+2} = \omega^i_{p+2}\vec e_i + \omega^{p+1}_{p+2}\vec e_{p+1} = \omega^i_{p+2}\vec e_i + c_a\omega^a\vec e_{p+1} = \omega^i_{p+2}\vec e_i ,$$

т.е. вдоль площадки $\Delta^p_{p-1}(x)$ орт $\vec e_{p+2}$ данной нормали переносит- ся параллельно в связности нормального расслоения. Из работы [1] непосредственно следует, что распределение Δ^p_{p-1} будет впо- лне интегрируемым в том и только том случае, когда нормальная связность будет плоской.

Условия интегрируемости указанных выше распределений рас- смотрены в [3]. В частности, найдена связь между их интегри- руемостью и свойствами сетей $\Sigma^*_p \subset V_p$ [2], а также положение[м] двумерной нормали к $\tilde V_p$.

Найдем условия одновременной интегрируемости распределе- ний Δ^p_{p-1} и Δ^f_{p-1}. В репере $R=(x,\vec e_i,\vec e_\alpha)$ имеем

$$d\vec a_{p+1} = d(c_i b^{ij})\vec e_j + c_i b^{ij}\omega^k_j\vec e_k + c_i b^{ij}\omega^\alpha_j\vec e_\alpha - \omega^i_{p+1}\vec e_i - \omega^{p+2}_{p+1}\vec e_{p+2}, \quad (5)$$

$$d\vec a_{p+2} = \omega^i_{p+2}\vec e_i + \omega^{p+1}_{p+2}\vec e_{p+1}. \quad (6)$$

С другой стороны, в репере $R=(x,\vec e_i,\vec a_\alpha)$:

$$d\vec a_{p+1} = \Omega^i_{p+1}\vec e_i + \Omega^{p+1}_{p+1}(c_i b^{ij}\vec e_j - \vec e_{p+1}) + \Omega^{p+2}_{p+1}\vec e_{p+2}, \quad (7)$$

$$d\vec a_{p+2} = \Omega^i_{p+2}\vec e_i + \Omega^{p+1}_{p+2}(c_i b^{ij}\vec e_j - \vec e_{p+1}) + \Omega^{p+2}_{p+2}\vec e_{p+2}. \quad (8)$$

Из (5) - (8), в частности, получаем

$$\Omega^{p+1}_{p+1} = -c_i b^{ij}\omega^{p+1}_j, \quad (9)$$

$$\Omega^{p+2}_{p+1} = c_i b^{ij}\omega^{p+2}_j - \omega^{p+2}_{p+1} = 0, \quad (10)$$

$$\Omega^{p+1}_{p+2} = -\omega^{p+1}_{p+2}, \quad (11)$$

$$\Omega^{p+2}_{p+2} = 0. \quad (12)$$

Формы Ω^α_β определяют связность $\tilde\nabla$. Эта связность будет плоской тогда и только тогда, когда

$$D\Omega^\beta_\alpha - \Omega^\gamma_\alpha \wedge \Omega^\beta_\gamma = 0,$$

т.е.

$$D\Omega^{p+1}_{p+2} - \Omega^{p+1}_{p+2}\wedge\Omega^{p+1}_{p+1} - \Omega^{p+2}_{p+2}\wedge\Omega^{p+1}_{p+2}, \quad (13)$$

$$D\Omega^{p+1}_{p+1} - \Omega^{p+2}_{p+1}\wedge\Omega^{p+1}_{p+2} = 0. \quad (14)$$

В силу (11) условие (13) равносильно интегрируемости распределения Δ^p_{p-1}. В силу (9) условие (14) равносильно интегрируемости распределения Δ^f_{p-1}. Таким образом, распределения Δ^p_{p-1} и Δ^f_{p-1} интегрируемы одновременно тогда и только тогда, когда связность $\tilde\nabla$ будет плоской.

Библиографический список

1. А к и в и с М.А., Ч а к м а з я н А.В. О подмногообразиях евклидова пространства с плоской нормальной связностью // Докл. АН АрмССР. 1976. Т.62. № 2. С.75-81.

2. Б а з ы л е в В.Т., К у з ь м и н М.К., С т о л я р о в А.В. Сети на многообразиях // Проблемы геометрии: Сб./ ВИНИТИ. М., 1981. Т.12. С.97-125.

3. Е с и н В.А. К геометрии распределений на $V_p \subset E_{p+2}$ // Тезисы сообщ. IX Всесоюз. геометр. конф. Кишинев, 1988. С.112-113.

4. Л а п т е в Г.Ф. Распределения касательных элементов// Труды геометрического семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.29-48.

УДК 514.75

ТЕОРИЯ КОНФОКАЛЬНЫХ КВАДРИК И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

А.А.З а й ц е в

(Калининградский государственный университет)

Излагается конструкция некоторого семейства интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем в фазовом пространстве произвольной размерности вместе с полным набором первых интегралов. Построена производящая функция гамильтонианов. На основе теории конфокальных квадрик методом Гамильтона-Якоби эти системы интегрируются в квадратурах.

1. Основные приложения теории конфокальных квадрик нашли место в классической механике. Наиболее известный пример: решение Ньютоном задачи Кеплера о движении материальной точки в центральном силовом поле с потенциалом $u=-\frac{k}{r}$. Большинство остальных применений принадлежит К.Якоби [1], который решил