2. Г.Ф.Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий, Труды Московского математического общества, 2, 1953, ГИТТЛ.

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

В.М.ОВЧИННИКОВ

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТОЧЕЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО.

Исследуется дифференцируемое локально биективное отображение f пространства Q квадратичных элементов [1] - n - мерного проективного пространства P_n в точечное N -мерное проективное пространство P_N $(N = C^2_{n+1} + n - 1)$. Построен основной фундаментальный объект отображения f [2]. Выделена система тензоров и квазитензоров отображения f.

§ I. Система дифференциальных уравнений отображения f.

Отнесем пространства P_n и P_N к реперам
$$z \equiv \{\bar{A}_{\alpha'}\} \quad \text{и} \quad R \equiv \{\bar{M}_{J'}\} \quad (\alpha', \beta', \gamma' = 1, 2, \ldots, n+1; \; J', \mathcal{J}', \varkappa', \ldots = 0, 1, \ldots, N).$$
Уравнения инфинитезимальных перемещений реперов z и R имеют вид:
$$d\bar{A}_{\alpha'} = \omega^{\beta'}_{\alpha'} \bar{A}_{\beta'}, \quad d\bar{M}_{J'} = \Omega^{\varkappa'}_{J'} \bar{M}_{\varkappa'}, \tag{1.1}$$
где формы $\omega^{\beta'}_{\alpha'}$, $\Omega^{\varkappa'}_{J'}$ удовлетворяют уравнениям структуры:
$$\mathcal{D}\omega^{\beta'}_{\alpha'} = \omega^{\gamma'}_{\alpha'} \wedge \omega^{\beta'}_{\gamma'}, \quad \mathcal{D}\Omega^{\mathcal{J}'}_{J'} = \Omega^{\varkappa'}_{J'} \wedge \Omega^{\mathcal{J}'}_{\varkappa'}. \tag{1.2}$$
Уравнения квадратичного элемента q пространства P_n запишутся в виде:
$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^{n+1} = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.3}$$
$$\det(a_{\alpha\beta}) = 1. \tag{1.4}$$

формы Пфаффа

$$\omega_\alpha=\omega_\alpha^{n+1},\quad \Theta_{\alpha\beta}=d a_{\alpha\beta}-a_{\alpha\gamma}\omega_\beta^\gamma-a_{\gamma\beta}\omega_\alpha^\gamma+\frac{2}{n}a_{\alpha\beta}\omega_\gamma^\gamma \qquad (1.5)$$

суть главные формы в пространстве Q квадратичных элементов [1]. Из (1.4) вытекает тождество

$$a^{\alpha\beta}\Theta_{\alpha\beta}\equiv 0. \qquad (1.6)$$

Следовательно,

$$\dim Q=N=C_{n+1}^2+n-1 \qquad (1.7)$$

Рассмотрим биективное отображение f пространства Q в пространство P_N.

Совмещая точку M_0 репера R с образом $f(q)$ квадратичного элемента q, приведем систему дифференциальных уравнений отображения f к виду:

$$\Theta_{\alpha\beta}=\Lambda_{\alpha\beta,\sigma}\Omega^\sigma,\quad \omega_\alpha=\Lambda_{\alpha,\sigma}\Omega^\sigma, \qquad (1.8)$$

где

$$\Omega^\sigma=\Omega_0^\sigma. \qquad (1.9)$$

§2. Поля фундаментальных геометрических объектов отображения f.

Система величин $\Gamma_1=\{a_{\alpha\beta};\Lambda_{\alpha,\sigma};\Lambda_{\alpha\beta,\sigma}\}$ образует фундаментальный объект первого порядка дифференцируемого отображения f.

Осуществляя последовательные продолжения системы дифференциальных уравнений (1.8), получим:

$$\Delta\Lambda_{\alpha\beta,\sigma}=\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\varkappa}\Omega^\varkappa,\quad \Delta\Lambda_{\alpha,\sigma}=\Lambda_{\alpha,\sigma\varkappa}\Omega^\varkappa, \qquad (2.1)$$

$$\Delta\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\varkappa}=\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\varkappa\ell}\Omega^\ell,\quad \Delta\Lambda_{\alpha,\sigma\varkappa}=\Lambda_{\alpha,\sigma\varkappa\ell}\Omega^\ell, \qquad (2.2)$$

где

$$\Delta\Lambda_{\alpha\beta,\sigma}=d\Lambda_{\alpha\beta,\sigma}+\Lambda_{\alpha\beta,\sigma}\Omega_0^0-\Lambda_{\alpha\beta,\varkappa}\Omega_\sigma^\varkappa-\Lambda_{\gamma\beta,\sigma}\omega_\alpha^\gamma-$$

$$-\Lambda_{\alpha\gamma,\sigma}\omega_\beta^\gamma+\frac{2}{n}\Lambda_{\alpha\beta,\sigma}\omega_\gamma^\gamma-(a_{\gamma\beta}\Lambda_{\alpha,\sigma}+a_{\alpha\gamma}\Lambda_{\beta,\sigma}-\frac{2}{n}a_{\alpha\beta}\Lambda_{\gamma,\sigma})\omega_{n+1}^\gamma,$$

$$\Delta\Lambda_{\alpha,\sigma}=d\Lambda_{\alpha,\sigma}+\Lambda_{\alpha,\sigma}\Omega_0^0-\Lambda_{\alpha,\varkappa}\Omega_\sigma^\varkappa+\Lambda_{\alpha,\sigma}\omega_{n+1}^{n+1}-\Lambda_{\gamma,\sigma}\omega_\alpha^\gamma,$$

$$\Delta\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\varkappa}=d\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\varkappa}-\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\ell}\Omega_\varkappa^\ell-\Lambda_{\alpha\beta,\ell\varkappa}\Omega_\sigma^\ell+2\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\varkappa}\Omega_0^0+$$

$$+\Lambda_{\alpha\beta,\sigma}\Omega_\varkappa^0+\Lambda_{\alpha\beta,\varkappa}\Omega_\sigma^0-\Lambda_{\gamma\beta,\sigma\varkappa}\omega_\alpha^\gamma-\Lambda_{\alpha\gamma,\sigma\varkappa}\omega_\beta^\gamma+\frac{2}{n}\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\varkappa}\omega_\gamma^\gamma- \qquad (2.3)$$

$$-(\Lambda_{\gamma\beta,\sigma}\Lambda_{\alpha,\varkappa}+\Lambda_{\alpha\gamma,\sigma}\Lambda_{\beta,\varkappa}-\frac{2}{n}\Lambda_{\alpha\beta,\sigma}\Lambda_{\gamma,\varkappa}+\Lambda_{\gamma\beta,\varkappa}\Lambda_{\alpha,\sigma}+$$

$$+a_{\gamma\beta}\Lambda_{\alpha,\sigma\varkappa}+\Lambda_{\alpha\gamma,\varkappa}\Lambda_{\beta,\sigma}+a_{\alpha\gamma}\Lambda_{\beta,\sigma\varkappa}-\frac{2}{n}\Lambda_{\alpha\beta,\varkappa}\Lambda_{\gamma,\sigma}-\frac{2}{n}a_{\alpha\beta}\Lambda_{\gamma,\sigma\varkappa})\omega_{n+1}^\gamma,$$

$$\Delta\Lambda_{\alpha,\sigma\varkappa}=d\Lambda_{\alpha,\sigma\varkappa}+2\Lambda_{\alpha,\sigma\varkappa}\Omega_0^0-\Lambda_{\alpha,\sigma\ell}\Omega_\varkappa^\ell-\Lambda_{\alpha,\ell\varkappa}\Omega_\sigma^\ell+\Lambda_{\alpha,\sigma}\Omega_\varkappa^0+$$

$$+\Lambda_{\alpha,\varkappa}\Omega_\sigma^0-\Lambda_{\gamma,\sigma\varkappa}\omega_\alpha^\gamma+\Lambda_{\alpha,\sigma\varkappa}\omega_{n+1}^{n+1}-(\Lambda_{\alpha,\sigma}\Lambda_{\gamma,\varkappa}+\Lambda_{\alpha,\varkappa}\Lambda_{\gamma,\sigma})\omega_{n+1}^\gamma,$$

а формы Пфаффа $\Delta\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\varkappa\ell}$; $\Delta\Lambda_{\alpha,\sigma\varkappa\ell}$ имеют аналогичную структуру.

Т е о р е м а. Фундаментальный объект $\Gamma_2=\{\Gamma_1;\Lambda_{\alpha,\sigma\varkappa};\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\varkappa}\}$ является основным объектом дифференцируемого отображения f.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система дифференциальных уравнений локального фундаментального объекта Γ_2 имеет вид:

$$\overset{\circ}{\Theta}_{\alpha\beta}=0,\quad \overset{\circ}{\Delta}\Lambda_{\alpha\beta,\sigma}=0,\quad \overset{\circ}{\Delta}\Lambda_{\alpha,\sigma}=0, \qquad (2.4)$$

$$\overset{\circ}{\Delta}\Lambda_{\alpha\beta,\sigma\varkappa}=0,\quad \overset{\circ}{\Delta}\Lambda_{\alpha,\sigma\varkappa}=0, \qquad (2.5)$$

где нолик над формой Пфаффа означает фиксацию первичных параметров. Так как в системе (2.4) отсутствуют формы $\Pi_\kappa^0=\overset{\circ}{\Omega}{}_\kappa^0$, то её нельзя алгебраически разрешить относительно всех вторичных форм

$$\bar{\pi}^{\beta}_{\alpha} = \pi^{\beta}_{\alpha} - \delta^{\beta}_{\alpha}\pi^{n+1}_{n+1}, \quad \bar{\Pi}^{\varkappa}_{\gamma} = \Pi^{\varkappa}_{\gamma} - \delta^{\varkappa}_{\gamma}\Pi^{0}_{0}, \ \Pi^{0}_{\gamma}, \ \pi^{\alpha}_{n+1} \qquad (2.6)$$

Из определения основного объекта [2] следует, что надо доказать алгебраическую разрешимость системы дифференциальных уравнений (2.4),(2.5) относительно вторичных форм (2.6). Система дифференциальных уравнений (2.4-5) вполне интегрируема. Следовательно, начальные значения компонент фундаментального объекта Γ_2 можно задавать произвольно с соблюдением тождеств (1.6).

Положим:

$$a_{\alpha\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha}; \quad \Lambda_{1,\gamma} = 1; \quad \Lambda_{\alpha,\gamma} = 0, \ \alpha \neq 1;$$

$$\Lambda_{1,\gamma\varkappa} = \delta^{\varkappa}_{\gamma}; \quad \Lambda_{\alpha,\gamma\varkappa} = 0, \ \alpha \neq 1; \quad \Lambda_{\alpha\alpha,\gamma} = 0$$

$$\Lambda_{12,1} = 1; \quad \Lambda_{\alpha\alpha,\gamma\varkappa} = \alpha; \quad \Lambda_{\alpha\beta,\gamma\varkappa} = 0 \ (\alpha \neq \beta)$$

Тогда

$$2\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\pi^{1}_{n+1} = \delta\Lambda_{11,1} - 2(\delta a_{12} - \delta\Lambda_{2,1}),$$

$$\bar{\pi}^{1}_{\alpha} = \delta\Lambda_{\alpha,1} \quad (\alpha \neq 1),$$

$$\bar{\pi}^{1}_{1} = \delta\Lambda_{1,1} - \tfrac{1}{2}(\delta\Lambda_{11,11} - \delta a_{11}) + \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\pi^{1}_{n+1},$$

$$\bar{\Pi}^{\gamma}_{\gamma} = \delta\Lambda_{1,\gamma} - \bar{\pi}^{1}_{1},$$

$$\Pi^{0}_{\gamma} = \delta\Lambda_{1,1} - \tfrac{1}{2}\bar{\pi}^{1}_{1} - \tfrac{1}{2}\delta\Lambda_{1,\gamma\gamma} + \pi^{1}_{n+1},$$

$$\bar{\Pi}^{\gamma}_{\varkappa} = \delta\Lambda_{1,\gamma\varkappa} - \delta\Lambda_{1,\gamma} + \bar{\pi}^{1}_{1} + 2\Pi^{0}_{\varkappa} - 2\pi^{1}_{n+1} \quad (\gamma \neq \varkappa),$$

$$(\beta - \alpha)\bar{\pi}^{\beta}_{\alpha} = \delta\Lambda_{\alpha\beta,11} - \alpha\,\delta a_{\alpha\beta} \quad (\alpha \neq \beta;\ \alpha,\beta \neq 1),$$

$$\bar{\pi}^{\alpha}_{\alpha} = \tfrac{1}{2}(\delta a_{\alpha\alpha} - \delta a_{11}) + \bar{\pi}^{1}_{1},$$

$$\pi^{\alpha}_{n+1} = \delta\Lambda_{\alpha1,1} - \delta\Lambda_{1,1} + 2\bar{\pi}^{1}_{1} - \delta a_{\alpha1} \quad (\alpha \neq 1),$$

(по γ -не суммировать!).

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Задание компонент фундаментального объекта $\Gamma_3 = \{\Gamma_2; \Lambda_{\alpha,\gamma\varkappa}; \Lambda_{\alpha\beta,\gamma\varkappa}\}$ определяет дифференцируемое отображение f с точностью до констант [2].

Из уравнений

$$\dot{\Theta}_{\alpha\beta} = \delta a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\gamma}\pi^{\gamma}_{\beta} - a_{\gamma\beta}\pi^{\gamma}_{\alpha} + \tfrac{2}{n}a_{\alpha\beta}\pi^{\gamma}_{\gamma} = 0$$

следует, что система величин $a_{\alpha\beta}$ образует дважды ковариантный симметрический тензор, являющийся подобъектом объекта Γ_2 .

Системы величин

$$(\Lambda_{\alpha,\gamma}); \quad n^{\beta}_{\gamma} = a^{\alpha\beta}\Lambda_{\alpha,\gamma}; \quad C_{\gamma\varkappa} = \tfrac{1}{2}a^{\alpha\beta}(\Lambda_{\alpha,\gamma}\Lambda_{\beta,\varkappa} + \Lambda_{\alpha,\varkappa}\Lambda_{\beta,\gamma})$$

образуют тензоры соответствующей валентности.

Действительно,

$$\delta\Lambda_{\alpha,\gamma} = -\Lambda_{\alpha,\gamma}\Pi^{0}_{0} + \Lambda_{\alpha,\varkappa}\Pi^{\varkappa}_{\gamma} - \Lambda_{\alpha,\gamma}\pi^{n+1}_{n+1} + \Lambda_{\gamma,\gamma}\pi^{\gamma}_{\alpha},$$

$$\delta n^{\beta}_{\gamma} = -n^{\beta}_{\gamma}\left(\Pi^{0}_{0} + \pi^{n+1}_{n+1} - \tfrac{2}{n}\pi^{\gamma}_{\gamma}\right) + n^{\beta}_{\varkappa}\Pi^{\varkappa}_{\gamma} - n^{\gamma}_{\gamma}\pi^{\beta}_{\gamma},$$

$$\delta C_{\gamma\varkappa} = -2C_{\gamma\varkappa}\left(\Pi^{0}_{0} + \pi^{n+1}_{n+1} - \tfrac{1}{n}\pi^{\gamma}_{\gamma}\right) + C_{\varkappa z}\Pi^{z}_{\gamma} + C_{\gamma z}\Pi^{z}_{\varkappa}.$$

Тензор $C_{\gamma\varkappa}$ определяет в пространстве P_N инвариантное поле гиперквадрик. Действительно,

$$F = C_{\gamma\varkappa}x^{\gamma}x^{\varkappa} = 0, \quad \delta F = \lambda F; \quad \lambda = -2\Pi^{0}_{0} - 2\pi^{n+1}_{n+1} + \tfrac{2}{n}\pi^{\gamma}_{\gamma} + 2\Theta.$$

Рассмотрим дифференцируемое биективное отображение пространства гиперквадрик $Q_{\bar{N}}$ в некоторую область пространства P_n:

$$f:\ Q_{\bar{N}} \to P_{\bar{N}} \qquad (\bar{N} = C^{2}_{n+1} - 1).$$

Система дифференциальных уравнений инвариантности гиперквадрики $a_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta} = 0$ $(\alpha,\beta = 1,2,\dots,n+1)$ пространства P_n имеет вид:

$$\Theta_{\alpha\beta} \equiv da_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta}\omega^{\gamma}_{\alpha} - a_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}_{\beta} + \tfrac{2}{n+1}a_{\alpha\beta}\omega^{\gamma}_{\gamma} = 0.$$

Система дифференциальных уравнений дифференцируемого отображения f запишется в виде:

- 60 -

$$\Theta_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta,\gamma}\Omega^{\gamma} \quad (2.7)$$

Система величин $\Gamma_0 = \{a_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta,\gamma}\}$ -образует внутренний фундаментальный объект дифференцируемого отображения f. Компоненты внутреннего фундаментального объекта $\Lambda_{\alpha\beta,\gamma}$ связаны соотношением

$$a^{\alpha\beta}\Lambda_{\alpha\beta,\gamma} = 0, \quad a^{\alpha\gamma}a_{\gamma\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}.$$

Осуществляя продолжение системы (2.7), получим внутренний фундаментальный объект

$$\Gamma_1 = \{a_{\alpha\beta}; \Lambda_{\alpha\beta,\gamma}; \Lambda_{\alpha\beta,\gamma\varkappa}\}.$$

Доказано, что он является основным.

Системы величин

$$n_{\gamma\varkappa} = a^{\alpha\beta}\Lambda_{\alpha\beta,\gamma\varkappa}; \quad b_{\alpha\beta} = n^{\gamma\varkappa}\cdot\Lambda_{\alpha\beta,\gamma\varkappa};$$

$$m_{\gamma y} = a^{\alpha\beta}a^{\gamma\rho}\Lambda_{\alpha\gamma,\gamma}\Lambda_{\beta\rho,y}; \quad c_{\gamma} = b^{\alpha\beta}\Lambda_{\alpha\beta,\gamma}$$

образуют тензоры соответствующей валентности.

Литература

I. В.С.Малаховский, Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. Геометрический сборн... вып. 3, Труды Томского университета, т. I68, стр. 28-42, 1963.

2. Г.Ф.Лаптев, Дифференциальная геометрия погруженных многооб... зий. Труды Московского м...ематического общества, 2, 1953, ГИ...

ТРУДЫ КАЛИНИНГРАДСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА.

Г.Л.СВЕШНИКОВА

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ.

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается ...онгруэнция кривых второго порядка (коник), две фокальные по...ерхности которой вырождаются в линии (конгруэнции F). Най...ены геометрические образы, ассоциированные с конгруэнцией F, ...сследованы некоторые её подклассы.

§ I. Конгруэнции F.

О п р е д е л е н и е I. Конгруэнцией F называется ...онгруэнция кривых второго порядка, обладающая следующими свойст...ами: I) существуют две фокальные поверхности (A_i) $(i,j,k=1,2)$, ...ырождающиеся в линии, 2) касательные ℓ_i к линиям (A_i) в точ...ах A_i не инцидентны плоскости коники, 3) прямолинейная конгру...нция (A_1A_2) не вырождается в линейчатую поверхность.

Отнесем конгруэнцию F к реперу $R=\{\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \bar{A}_4\}$, где A_3 – ...олюс прямой A_1A_2 относительно коники, а A_4 – точка на прямой ℓ, проходящей через A_3 и пересекающей прямые ℓ_i.

Инфинитезимальные перемещения репера R определяются дери...ационными формулами

$$d\bar{A}_\alpha = \omega_\alpha^\beta \bar{A}_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4), \quad (1.1)$$

...ричем пфаффовы формы ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры