УДК 514.75

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТЕЙ НА ДВУМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

И.Б. Б а р с к и й

(Марийский государственный педагогический институт)

В работе предлагается один из возможных методов исследования сетей на p-поверхностях в пространстве E_n. Исследование проведено на V_2 в E_4. Краткие сообщения приведены в работах [1], [2], [3].

1. **Об одном методе исследования сетей на V_p в E_n.** Основу метода исследования составляет факт, который следует из работы [4], а именно, любому направлению $\vec{a} = \vec{a}(\omega^i)$ в касательной плоскости $T_p(x)$ соответствует точка присоединенной поверхности $\tilde{V}_{q-1}$ в ортогональном дополнении $N_q(x)$, при этом справедливо и обратное, т.е. p точкам пересечения присоединенной поверхности с произвольной нормалью в касательной плоскости однозначно соответствуют p различных направлений (мы предполагаем, что $q = n - p$).

Предлагается следующая модель исследования сетей: 1) задать определенную нормаль в плоскости $N_q(x)$, найти точки пересенчения нормали с присоединенной поверхностью $\tilde{V}_{q-1}(x)$, а на $T_p(x)$ найти соответствующую сеть; 2) задать любую сеть, может быть с заранее определенными свойствами, найти соответствующие точки в $N_q(x)$, которые и определяют соответствующую нормаль.

При исследовании сетей на V_2 в E_4 мы будем использовать как первый путь исследования (достаточные условия существования сопряженной сети, теорема об ортогональной сети), так и второй путь (теорема о биссекторной сети).

2. **Основные соотношения** [4]. Присоединим к поверхности V_2 подвижной полуортогональной репер $\{x, \vec{e}_h\}$, где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ принадлежат касательной 2 – плоскости $T_2(x)$, а $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ образуют ортогональное дополнение $N_2(x)$. Тогда инфинитезимальные перемещения такого репера определяются уравнениями

$$\begin{cases} d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^a \vec{e}_a, \\ d\vec{e}_a = \omega_a^i \vec{e}_i + \omega_a^b \vec{e}_b, \end{cases} \tag{1}$$

где ω_i^a, ω^i удовлетворяют соотношениям

$$\omega_i^a = b_{ij}^a \omega^j, \quad b_{ij}^a = b_{ji}^a. \tag{2}$$

Распишем подробнее формулы (1) и (2)

$$\begin{cases} d\vec{x} = \omega^1 \vec{e}_1 + \omega^2 \vec{e}_2, \quad d\vec{e}_1 = \omega_1^1 \vec{e}_1 + \omega_1^2 \vec{e}_2 + \omega_1^3 \vec{e}_3 + \omega_1^4 \vec{e}_4, \\ d\vec{e}_2 = \omega_2^1 \vec{e}_1 + \omega_2^2 \vec{e}_2 + \omega_2^3 \vec{e}_3 + \omega_2^4 \vec{e}_4, \quad d\vec{e}_3 = \omega_3^1 \vec{e}_1 + \omega_3^2 \vec{e}_2 + \omega_3^3 \vec{e}_3 + \omega_3^4 \vec{e}_4, \\ d\vec{e}_4 = \omega_4^1 \vec{e}_1 + \omega_4^2 \vec{e}_2 + \omega_4^3 \vec{e}_3 + \omega_4^4 \vec{e}_4, \quad \omega_1^3 = b_{11}^3 \omega^1 + b_{12}^3 \omega^2, \\ \omega_1^4 = b_{11}^4 \omega^1 + b_{12}^4 \omega^2, \quad \omega_2^3 = b_{21}^3 \omega^1 + b_{22}^3 \omega^2, \quad \omega_2^4 = b_{21}^4 \omega^1 + b_{22}^4 \omega^2, \\ \omega_3^3 = 0, \quad \omega_3^4 = b_{31}^4 \omega^1 + b_{32}^4 \omega^2, \quad \omega_4^3 = b_{41}^3 \omega^1 + b_{42}^3 \omega^2, \quad \omega_4^4 = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Выполнив необходимые преобразования, получим

$$\begin{cases} d\vec{e}_1 = \omega_1^1 \vec{e}_1 + \omega_1^2 \vec{e}_2 + (b_{11}^3 \vec{e}_3 + b_{11}^4 \vec{e}_4)\omega^1 + (b_{12}^3 \vec{e}_3 + b_{12}^4 \vec{e}_4)\omega^2, \\ d\vec{e}_2 = \omega_2^1 \vec{e}_1 + \omega_2^2 \vec{e}_2 + (b_{21}^3 \vec{e}_3 + b_{21}^4 \vec{e}_4)\omega^1 + (b_{22}^3 \vec{e}_3 + b_{22}^4 \vec{e}_4)\omega^2. \end{cases} \tag{4}$$

Обозначим

$$\begin{cases} \vec{b}_{11} = b_{11}^3 \vec{e}_3 + b_{11}^4 \vec{e}_4, \quad \vec{b}_{22} = b_{22}^3 \vec{e}_3 + b_{22}^4 \vec{e}_4, \\ \vec{b}_{12} = \vec{b}_{21} = b_{12}^3 \vec{e}_3 + b_{12}^4 \vec{e}_4, \end{cases} \tag{5}$$

где $\vec{b}_{12}$ – вектор вынужденной кривизны.

Возьмем в плоскости $T_2(x)$, ортогональный репер $\vec{i}_k = \lambda_k^i \vec{e}_i$, тогда кривые, проходящие через точку x в направлении $\vec{i}_k$, имеют вектор нормальной кривизны

$$\vec{K}_{N_k} = b_{ij}^a \lambda_k^i \lambda_k^j \vec{e}_a. \tag{6}$$

Вектор средней кривизны определяется формулой

$$\vec{M} = \tfrac{1}{2}((b_{11}^3 + b_{22}^3)\vec{e}_3 + (b_{11}^4 + b_{22}^4)\vec{e}_4). \tag{7}$$

В соответствии с теоремой В.Т. Базылева [4], ортогональная сеть на поверхности V_2 будет сетью линий кривизны относительно средней нормали тогда и только тогда, когда

$$\vec{M}\vec{b}_{12} = 0. \tag{8}$$

Условие (8) запишется в виде

$$(b_{11}^3 + b_{12}^3)b_{12}^3 + (b_{11}^4 + b_{22}^4)b_{12}^4 = 0. \tag{9}$$

Минимальные поверхности из рассмотрения исключаются.

3. **Индикатриссы первой и второй нормальных кривизн.** В $N_2(x)$ вектор $\vec{e}_3$ направим по $\vec{b}_{12}$, а вектор $\vec{e}_4$ по $\vec{M}$. Тогда формулы (5) и (7) примут вид

$$\vec{b}_{12} = b_{12}^3 \vec{e}_3, \quad \vec{M} = \tfrac{1}{2}(b_{11}^4 + b_{22}^4)\vec{e}_4. \tag{10}$$

Соответствено, получим условия

$$b_{12}^4 = 0, \quad b_{11}^3 + b_{22}^3 = 0, \quad b_{12}^3 \neq 0, \quad b_{11}^4 + b_{22}^4 \neq 0 \quad (\vec{b}_{12} \neq \vec{0}). \tag{11}$$

Уравнение присоединенной кривой $\tilde{V}_1(x)$ запишется в виде

$$((b_{11}^3)^2+(b_{12}^3)^2)(y^3)^2-b_{11}^4b_{22}^4(y^4)^2+ \\ +b_{11}^3(b_{11}^4-b_{22}^4)y^3y^4+(b_{11}^4+b_{22}^4)y^4-1=0. \tag{12}$$

Рассмотрим как получается уравнение (12): для любого направления смещения точки x по поверхности $V_2(x)$, $d\vec{x}=\omega^1\vec{e}_1+\omega^2\vec{e}_2$, в базисе $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$плоскости $T_2(x)$ требовалось, чтобы для точки $y(y^3,y^4)\in N_2(x)$, $d\vec{y}\in N_2(x)$, откуда следует, что

$$\omega^1+y^3\omega_3^1+y^4\omega_4^1=0,\quad \omega^2+y^3\omega_3^2+y^4\omega_4^2=0. \tag{13}$$

С учетом выбора ортонормированного репера имеем

$$\omega_1^3=-\omega_3^1,\quad \omega_2^3=-\omega_3^2,\quad \omega_1^4=-\omega_4^1,\quad \omega_2^4=-\omega_4^2. \tag{14}$$

Учитывая формулы (3) для ω_a^i, из (13) получаем

$$K=\frac{\omega^2}{\omega^1}=\frac{1-b_{11}^3y^3-b_{11}^4y^4}{b_{12}^3y^3}=\frac{b_{12}^3y^3}{1+b_{11}^3y^3-b_{22}^4y^4}. \tag{15}$$

Приходим к заключению, что любой точке $y(y^3,y^4)\in\tilde{V}_1$ в касательной плоскости $T_2(x)$ соответствует направление с угловым коэффициентом K (15).

С другой стороны, если на поверхности V_2 задана сеть и присоединенный в точке x репер $\{x,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, определяющий плоскость $T_2(x)$, то угловой коэффициент $K=\omega^2/\omega^1$, а в плоскости $T_2(x)$ существует точка с координатами, соответствующими вектору

$$\vec{a}(a^1,a^2):\quad K=\frac{\omega^2}{\omega^1}=\frac{a^2}{a^1}=\frac{y^2}{y^1},\quad a^1=\lambda y^1,\quad a^2=\lambda y^2. \tag{16}$$

Итак, для любой линии l на поверхности V_2 определяется направление $\vec{i}_1=a^1\vec{e}_1+a^2\vec{e}_2=\lambda(y^1\vec{e}_1+y^2\vec{e}_2)$. Но тогда вектор нормальной кривизны линии l принимает вид

$$\vec{K}_N=((b_{11}^3)(y^1)^2+2(b_{12}^3)y^1y^2+(b_{22}^3)(y^2)^2)\vec{e}_3+ \\ +((b_{11}^4)(y^1)^2+2(b_{12}^4)y^1y^2+(b_{22}^4)(y^2)^2)\vec{e}_4, \\ \vec{K}_N=\vec{K}_{N_1}+\vec{K}_{N_2}. \tag{17}$$

Определение 1. Вектор $\vec{K}_{N_1}=(b_{11}^3(y^1)^2+2b_{12}^3y^1y^2+b_{22}^3(y^2)^2)\vec{e}_3$ назовем вектором первой нормальной кривизны линии l.

Определение 2. Вектор

$$\vec{K}_{N_2}=(b_{11}^4(y^1)^2+2b_{12}^4y^1y^2+b_{22}^4(y^2)^2)\vec{e}_4$$

назовем вектором второй нормальной кривизны линии l .

С учетом выбора репера

$$\vec{K}_{N_1} = (b_{11}^3(y^1)^2 + 2b_{12}^3 y^1 y^2 - b_{11}^3 (y^2)^2)\vec{e}_3, \tag{18}$$

$$\vec{K}_{N_2} = (b_{11}^4(y^1)^2 + b_{22}^4 (y^2)^2)\vec{e}_4. \tag{19}$$

По направлению линии l в касательной плоскости $T_2(x)$ от точки x отложим проекции $\left|\vec{K}_{N_1}\right|, \left|\vec{K}_{N_2}\right|$.

Определение 3. Проекции векторов $\vec{K}_{N_1}$ и $\vec{K}_{N_2}$ линии l на единичные векторы $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_4$ назовем соответственно первой и второй нормальными кривизнами линии l.

Проделав так в каждом направлении (ω^1, ω^2) на плоскости $T_2(x)$, получим две фигуры, образованные концами этих отрезков.

Определение 4. Полученные фигуры назовем, соответственно, индикатрисами первой и второй нормальных кривизн поверхности $V_2(x)$ и обозначим ИД1 и ИД2.

Уравнения индикатрис определяются стандартным образом:

$$\text{ИД1:}\ b_{11}^3(y^1)^2 + 2b_{12}^3 y^1 y^2 - b_{13}^3 (y^2)^2 \pm 1 = 0, \tag{20}$$

$$\text{ИД2:}\ b_{11}^4(y^1)^2 + b_{22}^4 (y^2)^2 \pm 1 = 0 \tag{21}$$

Легко проверить, что ИД1 - пара сопряженных гипербол.

Рассмотрим ИД2 : 1) при $b_{11}^4 b_{22}^4 > 0$ ИД2 - эллипс (вещественный или мнимый), при $b_{11}^4 = b_{22}^4$ ИД2 - окружность; 2) при $b_{11}^4 b_{22}^4 < 0$ ИД2 - две сопряженные гиперболы; 3) при $b_{11}^4 b_{22}^4 = 0$ ИД2 - пара параллельных прямых.

4. **Присоединенная кривая** $\tilde{V}_1$. Рассмотрим уравнение (12) присоединенной кривой: 1) при $b_{11}^4 b_{22}^4 \geq 0$ $\tilde{V}_1$– гипербола или пара пересекающихся прямых; 2) при $b_{11}^4 b_{22}^4 < 0$ нас будет интересовать гиперболический тип кривой $\tilde{V}_1$. Элементарное исследование показывает, что должно выполняться неравенство

$$\left|b_{11}^3\right| > \frac{2b_{12}^3}{\alpha + 1/\alpha}, \qquad \alpha = \sqrt{-b_{11}^4 / b_{22}^4}.$$

Сделаем важный вывод: исследование сетей должно начинаться с проверки однозначного задания поля одномерных нормалей, т.е. проверки пересечения любой нормалью присоединенной кривой $\tilde{V}_1$ в двух точках, а это возможно, если присоединенная кривая - гипербола. Исследования, проведенные выше, дают ответ на вопрос о соотношениях между компонентами тензора b_{ij}^a, которые обеспечивают гиперболический тип присоединенной кривой.

5. **Сопряженные сети на поверхности V_2 в E_4.** Пусть дана сеть линий кривизны относительно средней нормали $\left[x, \overset{1}{M}\right]$. Выберем репер как указано в п.3. Учтем требования к $\overset{0}{V}_1$, сформулированные в п.4.

Требования к индикатрисам ИД1 и ИД2 предполагаем следующие: сеть на поверхности V_2 в E_4 будет сопряженной, когда эта сеть будет сопряжена относительно обеих индикатрис.

Опуская исследование соотношений между компонентами тензора b_{ij}^{a}, при которых обеспечивается выполнение сформулированного требования для ИД1 и ИД2 и, учитывая соответствующие соотношения в п.3 для $\overset{0}{V}_1$, сформулируем окончательный результат.

Теорема 1. Сопряженная сеть на поверхности V_2 в E_4 в общем случае всегда существует и единственная, если выполнено одно из условий [1]:

1) $b_{11}^{4} b_{22}^{4} > 0,\ b_{11}^{4} \neq b_{22}^{4};$ (22)

2) $b_{11}^{4} b_{22}^{4} < 0,\ \left|b_{11}^{3}\right| > \dfrac{2b_{12}^{3}}{\sqrt{-b_{11}^{4}/b_{22}^{4}} + \sqrt{-b_{22}^{4}/b_{11}^{4}}}.$ (23)

Замечание 1. Говоря “общий случай”, мы подразумеваем, как обычно, исключение знаков “равенства” между компонентами тензора b_{ij}^{a}. В качестве примера рассмотрим довольно частный случай, который интересен тем, что позволяет, требуя только выполнения условий (9) и равенства $\left|b_{11}^{3}\right| = b_{12}^{3}$, выйти на числовую оценку промежутка, а именно, присоединенная кривая в этом случае будет гиперболой, если

$$-3 + 2\sqrt{2} < b_{11}^{4}/b_{22}^{4} < 0, \text{ либо } b_{11}^{4}/b_{22}^{4} < -3 - 2\sqrt{2}.$$

Замечание 2. Можно заметить, что существование и единственность асимптотической сети определяются условием (23).

6. **Сеть относительно нормали** $\left[x, \overset{1}{H}\right], \overset{1}{H} \perp \overset{1}{M}$. Задаем сеть линий кривизны и репер как и выше. В плоскости $N_2(x)$ нормаль $\left[x, \overset{1}{H}\right]$ пересекает присоединенную кривую в двух точках M_1 и M_2. Этим точкам однозначно соответствуют два направления в касательной плоскости $T_2(x)$ с угловыми коэффициентами $k_1 = \omega_1^2/\omega_1^1$ и $k_2 = \omega_2^2/\omega_2^1$, а эти направления определяют сеть V_2.

Можно показать, что точки M_i имеют координаты

$$\begin{cases} M_1(y_1^3, y_1^4) = M_1\left(\left((b_{11}^{3})^2 + (b_{12}^{3})^2\right)^{-\frac{1}{2}}, 0\right), \\ M_2(y_2^3, y_2^4) = M_2\left(-\left((b_{11}^{3})^2 + (b_{12}^{3})^2\right)^{-\frac{1}{2}}, 0\right). \end{cases} \tag{24}$$

Угловые коэффициенты k_i определяются по формулам (15).

Подставляя координаты точек M_i (24) в (15), получим

$$k_1 = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^1} = \frac{1}{b_{12}^3}\left(\sqrt{(b_{11}^3)^2 + (b_{12}^3)^2} - b_{11}^3\right),$$

$$k_2 = \frac{\omega_2^2}{\omega_2^1} = -\frac{1}{b_{12}^3}\left(\sqrt{(b_{11}^3)^2 + (b_{12}^3)^2} + b_{11}^3\right),$$

откуда $k_1 \cdot k_2 = -1$, т.е. доказана

Теорема 2. Сеть относительно нормали $\left[x, \overset{1}{H}\right]$ ортогональна [2].

7. **Биссекторная сеть**. Выше мы отмечали, что исследование сетей можно проводить и в обратном порядке: задать поля двух направлений в касательной плоскости $k_1 = \omega_1^2 / \omega_1^1$, $k_2 = \omega_2^2 / \omega_2^1$, определить соответствующие точки в ортогональном дополнении $N_2(x)$: $M_1(k_1), M_2(k_2) \in \widetilde{V}_1(x)$ и через эти точки провести нормаль, при этом: $M_1(y_1^3, y_1^4)$, $M_2(y_2^3, y_2^4)$.

Именно так мы рассмотрим биссекторную сеть к сети линий кривизны относительно средней нормали. Из формул (15) для соответствующих форм ω_i^j имеем

$$y^3(b_{11}^3\omega_1^1 + b_{12}^3\omega_1^2) + b_{11}^4\omega_1^1 y^4 - \omega_1^1 = 0,$$

$$y^3(b_{12}^3\omega_1^1 - b_{11}^3\omega_1^2) + b_{22}^4\omega_1^2 y^4 - \omega_1^2 = 0.$$

Выполнив необходимые пребразования, получим:

$$\begin{cases} y_1^3 = \dfrac{\omega_1^1\omega_1^2(b_{22}^4 - b_{11}^4)}{\omega_1^1\omega_1^2 b_{11}^3(b_{11}^4 + b_{22}^4) + b_{12}^3((\omega_1^2)^2 b_{22}^4 - (\omega_1^1)^2 b_{11}^4)}, \\ y_1^4 = \dfrac{b_{11}^4 b_{12}^3\omega_1^1((\omega_1^2)^2 - (\omega_1^1)^2) + 2(\omega_1^1)^2\omega_1^2 b_{11}^3 b_{11}^4}{\omega_1^1 b_{11}^4(\omega_1^1\omega_1^2 b_{11}^3(b_{11}^4 + b_{22}^4) + b_{12}^3((\omega_1^2)^2 b_{22}^4 - (\omega_1^1)^2 b_{11}^4))} \end{cases} \tag{25}$$

Для биссекторной сети в касательной плоскости имеем

$$k_1 = \omega_1^2 / \omega_1^1 = 1, \qquad k_2 = \omega_2^2 / \omega_2^1 = 1,$$

и, с учетом (25), получаем координаты двух соответствующих точек на $\widetilde{V}_1(x)$

$$M_1\left(\frac{b_{22}^4 - b_{11}^4}{b_{11}^3(b_{11}^4 + b_{22}^4) + b_{12}^3(b_{22}^4 - b_{11}^4)},\ \frac{2b_{11}^3}{b_{11}^3(b_{11}^4 + b_{22}^4) + b_{12}^3(b_{22}^4 - b_{11}^4)}\right),$$

$$M_2\left(\frac{b_{22}^4 - b_{11}^4}{b_{11}^3(b_{11}^4 + b_{22}^4) - b_{12}^3(b_{22}^4 - b_{11}^4)},\ \frac{2b_{11}^3}{b_{11}^3(b_{11}^4 + b_{22}^4) - b_{12}^3(b_{22}^4 - b_{11}^4)}\right).$$

Заметим, что все точки x, M_1 и M_2 лежат на одной прямой, т. е. принадлежат соответствующей нормали в ортогональном дополнении $N_2(x)$.

Но тогда однозначно определен вектор

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \frac{2(b_{22}^4 - b_{11}^4)b_{12}^3}{(b_{11}^3)^2(b_{11}^4 + b_{22}^4)^2 - (b_{12}^3)^2(b_{22}^4 - b_{11}^4)^2} \cdot \vec{n}, \qquad (26)$$

где $\vec{n} = (b_{22}^4 - b_{11}^4, 2b_{11}^3)$.

Рассмотрим векторы из (5):

$$\vec{b}_{11} = b_{11}^3 \vec{e}_3 + b_{11}^4 \vec{e}_4, \quad \vec{b}_{22} = -b_{11}^3 \vec{e}_3 + b_{22}^4 \vec{e}_4.$$

Заметим, что вектор

$$\vec{b}_{22} - \vec{b}_{11} = (-2b_{11}^3, b_{22}^4 - b_{11}^4). \qquad (27)$$

Из (26) и (27) следует $\vec{n} \cdot (\vec{b}_{22} - \vec{b}_{11}) = 0$, т.е. доказана.

Теорема 3. Нормали $[x, \vec{n}]$, где $\vec{n} \perp (\vec{b}_{22} - \vec{b}_{11})$ в ортогональном дополнении *N₂(x)* на поверхности V_2 соответствует биссекторная сеть [3].

8. **Замечание об инвариантности результатов исследований**. Выше мы проводили исследования сетей относительно средней нормали. Но известно [4], что средняя нормаль $\vec{M}$ инвариантна. Дальнейшие построения индикатрис ИД1 и ИД2 носили геометрический характер, а следовательно, и полученные следствия - инвариантны.

Известно [4], что для каждого поля одномерных нормалей $[x, \vec{e}_a] \subset N_q(x)$ на поверхности V_p определяется соответсвующая ортогональная сеть линий кривизны. Следовательно, мы можем выполнить предлагаемую выше конструкцию и относительно произвольной нормали, но при этом каждый результат необходимо проверять на инвариантность.

Библиографический список

1. Барский И.Б. IX Всес. геом. конф.: Тез. сообщ. Кишинев, 1988. С.35.
2. Барский И.Б. Межвуз. науч. конф.: Тез. докл. Йошкар-Ола, 1990. С. 35-36.
3. Барский И.Б. Междун. науч. конф.: Тез. докл. Казань, 1992. Ч. 1. С. 9-10.
4. Базылев В.Т. Лит. мат. сб. 1966. Т. VI. № 4. С. 475-491.