Доказательство. Рассмотрим матрицу B, составленную из коэффициентов при ξ^2_m $(m \neq 1,2,n)$, ξ^s_n $(s \neq 1;n)$, ξ^2_2 в уравнениях $\binom{2}{k2}$ $(k \neq 1,2,n)$, $\binom{h}{n2}$$(h \neq 1,n)$, $\binom{h}{n2}$, $(h \neq 1;n)$, $\binom{3}{23}$. Матрица B имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} E_{n-3}T^1_{21} & * & * \\ 0 & E_{n-2} \cdot \left(T^1_{12} - T^n_{n2}\right) & * \\ 0 & 0 & T^1_{12} \end{pmatrix}.$$

Отсюда, r(B)= 2n-4.

Доказанные леммы позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Если тензор кручения T пространства $A_n=(M_n, \nabla)$ удовлетворяет условию $T \neq I \otimes \omega - \omega \otimes I$, то размерность интранзитивной группы движений этого пространства не больше, чем n^2-$2n+3$.*

Приведенная в теореме граница точная. Рассмотрим пространство $A_n=(R^n, \nabla)$, где ∇ задана компонентами вида

$$\Gamma^1_{23} = -\Gamma^1_{32} = \left(x^2\right)^2 + 1, \text{ остальные } \Gamma^i_{jk} = 0.$$

Максимальная группа аффинных преобразований этого пространства интранзитивна и имеет размерность n^2-$2n+3$.

Список литературы

1. *Егоров И.П.* Максимально подвижные L_n полусимметрической связности // Докл. АН СССР. 1952.Т. 84. № 3. С. 433-435.

2. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.I. 344 с.

3. *Эйзерхарт Л.* Непрерывные группы преобразований. М.:ИЛ. 1947. 359 с.

A.Ya. Sultanov

ON THE INTRANSITIVE GROUPS OF MOTION OF SPACES OF AFFINE CONNECTIONS

It is proved that the dimension of intransitive groups of motion of spaces of affine connection A_n is not more than n^2-$2n+3$, if torsion tensor T satisfies the condition $T \neq I \otimes \omega - \omega \otimes I$.

УДК 514.76

Н.С. Султанова

(*Пензенская государственная архитектурно-строительная академия*)

ОБ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ В КОКАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ СО СВЯЗНОСТЬЮ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО ЛИФТА

Получено каноническое разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования на $T^*(M_n)$ со связностью $\nabla^н$ при условии T=0, W=0, где T – тензор кручения, W – тензор проективной кривизны связности ∇.

§1. Основные определения и факты

Пусть M_n – связное дифференцируемое многообразие класса C^∞, ∇ – линейная связность, заданная на M_n. На кокасательном расслоении $T^*(M_n)$ существует единственная линейная связность $\nabla^н$, называемая горизонтальным лифтом связности ∇, удовлетворяющая следующим условиям [1]:

$$\nabla^н_{X^н} Y^н = (\nabla_X Y)^н,\ \nabla^н_{X^н} \omega^{v^*} = (\nabla_X \omega)^{v^*},\ \nabla^н_{\omega^{v*}} X^н = 0,\ \nabla^н_{\omega^{v*}} \varphi^{v*} = 0$$

где X, Y – векторные поля, ω, φ – линейные формы на M_n; векторное поле $X^н$ на $T^*(M_n)$ является горизонтальным лифтом векторного поля X, а векторное поле ω^{v*} на $T^*(M_n)$ является вертикальным лифтом линейной формы ω.

В [2] доказано, что векторное поле $\tilde{X}$ вляется инфинитезимальным аффинным преобразованием тогда и только тогда, когда существуют векторное поле X, линейная форма θ, тензорные поля F типа (2,0), Q типа (1,1) такие, что

$$\tilde{X} = X^{(0)} + F^{\gamma н} + Q^{\gamma^*} + \theta^{v^*}, \tag{1.1}$$

причем

$$L_x\nabla=0,\ \nabla Q=0,\ \nabla F=0,\ F\cdot T=0,\ F\cdot R=0,\ \nabla^2\theta=0.$$

Здесь L_x – символ дифференцирования Ли относительно векторного поля X, ∇Q, ∇F – ковариантные дифференциалы тензорных полей Q и F, $\nabla^2\theta$ – второй ковариантый дифференциал формы θ. Тензорные поля F·T, F·R означают свертки $C^2{}_1$ с тензорными полями кручения и кривизны связности ∇.

§2. Каноническое разложение инфинитезимального аффинного преобразования в $T^*(M_n)$ над проективно-евклидовым пространством

Предположим, что база M_n кокасательного расслоения $T^*(M_n)$ снабжена линейной связностью ∇ без кручения, являющейся проективно-евклидовой. Это условие эквивалентно обращению в нуль тензора W проективной кривизны Вейля [3].

Пусть (U, x^i) – координатная окрестность на M_n. Тогда условие W=0 в локальных координатах примет вид [3]:

$$R^h_{ijk} = -\frac{1}{n^2-1}\delta^h_i(P_{jk} - P_{kj}) - \frac{1}{n^2-1}\delta^h_j P_{ik} + \frac{1}{n^2-1}\delta^h_k P_{ij}, \qquad (2.1)$$

где $P_{ij} = nR_{ij}+R_{ji}$, $R_{ij}= R^m_{ijm}$ – компоненты тензорного поля Риччи.

Рассмотрим условие F·R=0 для тензорного поля F, входящего в разложение (1.1) более подробно. В выбранной карте (U, x^i) тензорное поле F·R имеет компоненты

$$(F\cdot R)^{kh}_{ij} = F^{km}R^h_{imj}$$

В силу этого соотношение F·R=0 будет равносильно системе

$$F^{km}R^h_{imj} = 0 \qquad (2.2)$$

Отсюда, в результате свертки по индексам h и j получим

$$F^{km}R_{im} = 0. \qquad (2.3)$$

Учитывая тождество $R^h_{ijk} = -R^h_{ikj}$ и тождество Бианки $R^h_{imj} + R^h_{mji} + R^h_{jim} = 0$, из (2.2) получим

$$F^{km}R_{mi} = 0. \qquad (2.4)$$

Из соотношения (2.2) и (2.3) следуют соотношения: $F^{km}P_{im}=F^{km}P_{mi}=0$, которые на основании равенств (2.1) позволяют заключить, что $F^{kh}P_{ij} = 0$. Последние соотношения равносильны следующим: $F^{kh}R_{ij} = 0$.

Так как связность ∇ неплоская, то тензор Риччи отличен от нуля. Следовательно, в координатной окрестности (U, x^i) по крайней мере одна из компонент не обращается в нуль в каждой точке некоторого открытого подмножества V области U. Тогда в каждой точке множества V имеем F^{kh}=0.

Пусть supp R – замыкание множества точек M_n, в которых R≠0. В точках этого множества F=0. Множество M_n\ supp R открыто и, поскольку многообразие M_n связное, то $\overline{M_n \setminus \mathrm{supp}\, R} \neq M_n$ \supp R,если только M_n\ supp R≠$\varnothing$. При M_n\ supp R=$\varnothing$ имеем M_n= supp R и, следовательно, F=0.

Если $M_n \neq \operatorname{supp} R$, то каждая точка $x \in \overline{M_n \setminus \operatorname{supp} R}$ и $x \in M_n \setminus \operatorname{supp} R$, является граничной для supp R и $M_n \setminus$ supp R.

Рассмотрим произвольную граничную точку x_0 и координатную окрестность (U, x^i), содержащую эту точку. В окрестности U рассмотрим дифференциальное уравнение ∇ F=0, которое в локальных координатах равносильно системе дифференциальных уравнений.

$$\nabla_k F^{ij} = 0\,. \tag{2.5}$$

Первая серия условий интегрируемости системы (2.5) имеет вид:

$$F^{mj} R^{i}_{mkt} + F^{im} R^{j}_{mkt} = 0. \tag{2.6}$$

Остальные серии получаются из (2.6) ковариантным дифференцированием с учетом (2.5). Поэтому остальные серии примут вид:

$$F^{mj}\ \nabla_{s_p \dots s_1} R^{i}_{mkl} + F^{im}\ \nabla_{s_p \dots s_1} R^{"}_{mkl} = 0. \tag{2.7}$$

В окрестности U точки x_0 соотношения (2.6) и (2.7) выполняются тождественно. Действительно, если $x \in$ supp R, то $F_x=0$.

Если же $x \in M_n \setminus \operatorname{supp} R$, то $R_x=0$ и все ковариантные дифференциалы $(\nabla R)x_0$ также обращаются в нуль. Таким образом, система *(2.5)* вполне интегрируема в окрестности U. Поэтому существует окрестность$V \subset U$ точки x_0, в которой система *(2.5)* имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям $F^{ij}(x_0)=0$. С другой стороны, система функций $F^{ij} \equiv 0$, заданная в (V,x^i), удовлетворяет системе (2.5) и заданным начальным условиям.

Поэтому в окрестности $V \subset U$ имеем единственное решение $F^{ij} \equiv 0$. Поскольку F^{ij} – компоненты тензорного поля, то в каждой карте, носитель которой имеет непустое пересечение с V компоненты тензорного поля F также равны нулю. В силу связности многообразия M_n отсюда будет следовать, что F=0 во всех точках множества $M_n \setminus \operatorname{supp} R$. Следовательно, F=0 на M_n.

Таким образом, если линейная связность ∇, заданная на M_n неплоская и является проективно-евклидовой, то всякое инфинитезимальное преобразование $\tilde{X}$ кокасательного расслоения $T^*(M_n)$ со связностью $\nabla^{н}$ имеет единственное разложение в виде:

$$\tilde{X} = X^{(0)} + Q^{\gamma v^*} + \theta^{v^*}\,,$$

причем $L_X \nabla = 0$, $\nabla Q = 0$, $\nabla^2 \theta = 0$.

Поскольку $\tilde{X} - X^{(0)}$ – вертикальное векторное поле на $T^*(M_n)$, то имеем, что всякое инфинитезимальное аффинное преобразование кокасательного расслоения $T^*(M_n)$ со связностью $\nabla^н$ является проектируемым при условии, что связность ∇ на базе проективно-евклидова и неплоская.

Список литературы

1. *Jano K., Ishihara Sh.* Tangens and cotangens bundles; differential geometry. New York: Dekker, 1973. IX: 423 p.

2. *Султанова Н.С.* Инфинитезимальные афинные преобразования кокасательного расслоения со связностью горизонтального лифта // Движения в обобщенных пространствах. Межвуз. сб. науч. тр. Пенза, 1999. С.150-156.

3. *Синюков Н.С.* Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979. 256 с.

N.S. Sultanova

ON THE INFINITESIMAL AFFINE TRANSFORMATIONS
IN THE COTANGENT BUNDLE WITH THE HORIZONTAL LIFT

We obtained a canonical expansion of any infinitesimal affine transformations on $T^*(M_n)$ with connections $\nabla^н$ on condition that T=0, W=0, where T is a torsion tensor, W is a projective curvature tensor for the connections ∇.

УДК 514.76

Ю.И. Шевченко

(Калининградский государственный университет)

ПУЧКИ АФФИННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА ГРУППЕ ЛИ И ПАРАЛЛЕЛИЗУЕМОМ МНОГООБРАЗИИ

Путем сопоставления структурных уравнений группы Ли и соответствующего пространства аффинной связности введен пучок аффинных связностей на группе Ли. Три аффинных связности Картана-Схоутена-Эйзенхарта, две из которых без кривизны и одна без кручения, принадлежат этому пучку. Пучок аффинных связностей распространен на параллелизуемое многообразие, обобщающее группу Ли. В общем случае обобщенный пучок содержит лишь две специальных аффинных связности: одну без кривизны и одну без кручения.

1. Группа Ли и пространство аффинной связности. Пусть r-членная группа Ли G_r имеет структурные уравнения: