УДК 514.76

С. В. Галаев[1]
[1] *Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Россия*
sgalaev@mail.ru

Допустимые пара-гиперкэлеровы структуры на распределениях почти контактных метрических многообразий

Вводится понятия допустимой (почти) пара-гиперкэлеровой структуры. На распределении почти контактного метрического многообразия как на тотальном пространстве векторного расслоения определяется допустимая почти пара-гиперкомплексная структура. Доказывается, что построенная почти пара-гиперкэлерова структура интегрируема тогда и только тогда, когда распределение является распределением нулевой кривизны.

Ключевые слова: почти контактная метрическая структура, допустимая пара-гиперкэлерова структура, распределение нулевой кривизны.

1. Введение. Основные результаты о геометрии почти пара-гиперкэлеровых многообразий изложены в работе [1]. В настоящей работе определяется контактный аналог пара-гиперкэлеровой структуры — допустимая пара-гиперкэлерова структура $\left(M, g, \vec{\xi}, \eta, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, D\right)$. Допустимая пара-гиперкэлерова структура имеет сходство с допустимой гиперкэлеровой структурой [9; 10]. В работе доказывается, что допустимая пара-гиперкэлерова структура естественным образом возника-

Поступила в редакцию 26.05.2018 г.

ет на распределении нулевой кривизны D почти контактного метрического многообразия $\left(M,\vec{\xi},\eta,g,\varphi,D\right)$.

2. Допустимые почти пара-гиперкэлеровы структуры. Рассмотрим на гладком многообразии M размерности $n = 4m + 1$ почти контактную структуру $\left(M,\vec{\xi},\eta,\varphi_1,D\right)$, где φ_1 — допустимая почти комплексная структура [8]. Предположим, что на многообразии M заданы две допустимые почти пара-комплексные структуры φ_2 и φ_3 такие, что $\varphi_1\varphi_2 = -\varphi_2\varphi_1 = \varphi_3$. Назовем многообразие M, наделенное структурой $\left(M,\vec{\xi},\eta,\varphi_i,D\right)$, $i = 1, 2, 3$, почти контактным почти пара-гиперкомплексным многообразием. Структуру $\left(M,\vec{\xi},\eta,\varphi_i,D\right)$ при этом будем называть допустимой почти пара-гиперкомплексной структурой. Если каждая из допустимых аффинорных структур φ_i интегрируема (почти нормальна) [8], то есть если $N_{\varphi_i} + 2(d\eta\circ\varphi_i)\otimes\vec{\xi} = 0$, то допустимую почти пара-гиперкомплексную структуру $\left(M,\vec{\xi},\eta,\varphi_i,D\right)$ будем называть интегрируемой или допустимой пара-гиперкомплексной структурой, а многообразие M — почти контактным пара-гиперкомплексным многообразием.

Рассмотрим модельный пример почти контактного пара-гиперкомплексного многообразия. Пусть $M = R^5$, $\vec{e}_1 = \partial_1 - x_2\partial_5$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \partial_3 - x^4\partial_5$, $\vec{e}_4 = \partial_4$, $\vec{\xi} = \partial_5$, $\eta = dx^5 + x^2dx^1 + x^4dx^3$, $D = \ker\eta$.

Определим допустимые к распределению D аффинорные структуры φ_i, полагая

$$\varphi_1 : \vec{e}_1 \to \vec{e}_3, \vec{e}_2 \to \vec{e}_4, \vec{e}_3 \to -\vec{e}_1, \vec{e}_4 \to -\vec{e}_2,$$

$$\varphi_2 : \vec{e}_1 \to \vec{e}_3, \vec{e}_2 \to \vec{e}_4, \vec{e}_3 \to \vec{e}_1, \vec{e}_4 \to \vec{e}_2,$$

$$\varphi_3 : \vec{e}_1 \to -\vec{e}_1, \vec{e}_2 \to -\vec{e}_2, \vec{e}_3 \to \vec{e}_3, \vec{e}_4 \to \vec{e}_4.$$

Из определения аффинорных структур φ_i следует, что $\varphi_1\varphi_2 = -\varphi_2\varphi_1 = \varphi_3$. Непосредственно проверяется, что допустимые почти (пара) комплексные структуры φ_i являются почти нормальными.

3. Связности на почти контактных метрических многообразиях с распределением нулевой кривизны. Пусть M — гладкое многообразие нечетной размерности $n = 2m + 1$, $\Gamma(TM)$ — модуль гладких векторных полей на M. Все многообразия, тензорные поля и другие геометрические объекты предполагаются гладкими класса C^∞. Предположим, что на M задана почти контактная метрическая структура $\left(M,\vec{\xi},\eta,\varphi,g,D\right)$, где φ — тензор типа (1,1), называемый структурным эндоморфизмом или допустимой почти комплексной структурой, $\vec{\xi}$ и η — вектор и ковектор, называемые соответственно структурным вектором и контактной формой, g — (псевдо) риманова метрика. При этом выполняются следующие условия:

1) $\varphi^2 = -I + \eta\otimes\vec{\xi}$, 2) $\eta\left(\vec{\xi}\right) = 1$,

3) $g(\varphi\vec{x},\varphi\vec{y}) = g(\vec{x},\vec{y}) - \eta(\vec{x})\eta(\vec{y})$, 4) $d\eta\left(\vec{\xi},\vec{x}\right) = 0$,

где $\vec{x},\vec{y}\in\Gamma(TM)$. Гладкое распределение $D = \ker\eta$ называется распределением почти контактной структуры.

В качестве следствия условий 1) — 4) получаем:

5) $\varphi\vec{\xi} = \vec{0}$, 6) $\eta\circ\varphi = 0$, 7) $\eta(\vec{x}) = g\left(\vec{x},\vec{\xi}\right)$, $\vec{x}\in\Gamma(TM)$.

Если $rk\,\omega = 2m$, где $\omega = d\eta$, вектор $\vec{\xi}$ однозначно определяется из условий $\eta\left(\vec{\xi}\right) = 1$, $\ker\omega = Span\left(\vec{\xi}\right)$.

Внутренней линейной связностью ∇ [2—7, 11] на почти контактном метрическом многообразии называется отображение $\nabla:\Gamma(D)\times\Gamma(D)\to\Gamma(D)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla_{f_1\vec{x}+f_2\vec{y}} = f_1\nabla_{\vec{x}} + f_2\nabla_{\vec{y}}$,

2) $\nabla_{\vec{x}} f\vec{y} = (\vec{x}f)\vec{y} + f\nabla_{\vec{x}}\vec{y}$,

3) $\nabla_{\vec{x}}(\vec{y}+\vec{z}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} + \nabla_{\vec{x}}\vec{z}$,

где $\Gamma(D)$ — модуль допустимых векторных полей (векторных полей, в каждой точке принадлежащих распределению D). Внутренняя связность определяет дифференцирование допустимых тензорных полей [8].

На протяжении всей работы мы используем адаптированные координаты. Карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1,..., n; a, b, c = 1,..., n-1, i, j, k = 2n-1$) многообразия M будем называть адаптированной к распределению D, если $\partial_n = \vec{\xi}$ [12]. Пусть $P: TM \to D$ — проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a\partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают распределение D: $D = span(\vec{e}_a)$.

Коэффициенты внутренней линейной связности определяются из соотношения $\nabla_{\vec{e}_a}\vec{e}_b = \Gamma^c_{ab}\vec{e}_c$. Из равенств $\vec{e}_a = A^{a'}_a\vec{e}_{a'}$, где $A^{a'}_a = \dfrac{\partial x^{a'}}{\partial x^a}$, обычным образом следует формула преобразования для коэффициентов внутренней связности: $\Gamma^c_{ab} = A^{a'}_a A^{b'}_b A^c_{c'}\Gamma^{c'}_{a'b'} + A^c_{c'}\vec{e}_a A^{c'}_b$.

Кручением и кривизной внутренней связности назовем соответственно допустимые тензорные поля

$$S(\vec{x},\vec{y}) = \nabla_{\vec{x}}\vec{y} - \nabla_{\vec{y}}\vec{x} - P[\vec{x},\vec{y}],$$

$$R(\vec{x},\vec{y})\vec{z} = \nabla_{\vec{x}}\nabla_{\vec{y}}\vec{z} - \nabla_{\vec{y}}\nabla_{\vec{x}}\vec{z} - \nabla_{P[\vec{x},\vec{y}]}\vec{z} - P\left[Q[\vec{x},\vec{y}],\vec{z}\right],$$

где $Q=I-P$, $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \Gamma(D)$. Тензор $R(\vec{x},\vec{y})\vec{z}$ носит название тензора кривизны субриманова многообразия.

В адаптированных координатах кривизна и кручение внутренней связности получают соответственно следующие координатные представления:

$$R^{d}_{abc} = 2\vec{e}_{[a}\Gamma^{d}_{b]c} + 2\Gamma^{d}_{[a|e|}\Gamma^{e}_{b]c}, \; S^{a}_{bc} = \Gamma^{a}_{bc} - \Gamma^{a}_{cb}.$$

Известно [8], что на почти контактном метрическом многообразии существует единственная внутренняя связность ∇ с нулевым кручением, такая, что $\nabla_{\vec{x}} g(\vec{x}, \vec{y}) = 0.$

Назовем связность ∇ внутренней симметрической метрической связностью. Коэффициенты связности ∇ находятся по формулам

$$\Gamma^{a}_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \left(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc} \right).$$

Наиболее просто устроены почти контактные метрические многообразия с нулевым тензором кривизны Схоутена [8].

Пусть $P(\vec{x}, \vec{y})$ — допустимое тензорное поле с компонентами $P^{a}_{bc} = \partial_n \Gamma^{a}_{bc}.$

Предложение 1. *На почти контактном метрическом многообразии с неинтегрируемым распределением D и с нулевым тензором кривизны Схоутена выполняется равенство* $P(\vec{x}, \vec{y}) = 0.$

Доказательство. Проводя необходимые вычисления в адаптированных координатах, убеждаемся в справедливости равенства $\nabla_{[e}\nabla_{a]} g_{bc} = 2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} - g_{dc}R^{d}_{eab} - g_{bd}R^{d}_{eac}.$

Используя метричность связности ∇, получаем

$$2\omega_{ea}\partial_n g_{bc} = g_{dc}R^{d}_{eab} + g_{bd}R^{d}_{eac}.$$

Таким образом, обращение в нуль тензора кривизны Схоутена влечет равенство $\partial_n g_{bc} = 0,$ из которого следует, что $\partial_n \Gamma^{a}_{bc} = 0.$ Предложение доказано.

4. Продолженные допустимые пара-гиперкомплексные структуры. Введем на распределении D почти контактного метрического многообразия структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^{\alpha})$ многообразия M сверхкарту $\tilde{K}(x^{\alpha}, x^{n+a})$ на многообразии D, где (x^{n+a}) — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n$. Построенную сверхкарту также будем называть адаптированной.

Векторные поля

$$(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma^n_a \partial_n - \Gamma^b_{ac} x^{n+c} \partial_{n+b},\, \partial_n,\, \partial_{n+a}) = (A_i)$$

определяют [4] на распределении D как на гладком многообразии неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma^n_a dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + \Gamma^a_{bc} x^{n+c} dx^b)$ — соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b\right] = 2\omega_{ba}\partial_n + x^{n+d} R^c_{bad} \partial_{n+c},$$

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \partial_n\right] = x^{n+d} \partial_n \Gamma^c_{ad} \partial_{n+c},$$

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}\right] = \Gamma^c_{ab} \partial_{n+c},$$

где R^c_{bad} — компоненты тензора Схоутена в адаптированных координатах [10]. Имеет место

Предложение 2 [10]. *Пусть* ∇ *— внутренняя связность с тензором кривизны Схоутена* $R(\vec{x}, \vec{y})\vec{z}$. *Тогда для всех* $\vec{x}, \vec{y} \in \Gamma(D)$ *и* $\vec{p} \in D$ *имеют место следующие равенства:*

$$\left[\vec{x}^h, \vec{y}^h\right]_{\vec{p}} = \left[\vec{x}, \vec{y}\right]^h - \left\{R\left(\vec{x}, \vec{y}\right)\vec{p}\right\}^v, \qquad (1)$$

$$\left[\vec{x}^h, \vec{\xi}^h\right]_{\vec{p}} = \left[\vec{x}, \vec{\xi}\right]^h + \left\{P\left(\vec{x}, \vec{p}\right)\right\}^v, \tag{2}$$

$$\left[\vec{x}^h, \vec{y}^v\right] = \left(\nabla_{\vec{x}} \vec{y}\right)^v, \tag{3}$$

$$\left[\vec{x}^v, \vec{\xi}^h\right] = \left[\vec{x}, \vec{\xi}\right]^v. \tag{4}$$

Определим на распределении D допустимую почти пара-гиперкомплексную структуру $(\tilde{D}, J, S, T, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$, полагая, что

$$J\left(\vec{x}^h\right) = \left(\varphi \vec{x}\right)^h, \ J\left(\vec{x}^v\right) = -\left(\varphi \vec{x}\right)^v, \ J\left(\vec{u}\right) = \vec{0},$$

$$S\left(\vec{x}^h\right) = \vec{x}^v, \ S\left(\vec{x}^v\right) = \vec{x}^h, \ S\left(\vec{u}\right) = \vec{0},$$

$$T\left(\vec{x}^h\right) = -\left(\varphi \vec{x}\right)^v, \ T\left(\vec{x}^v\right) = \left(\varphi \vec{x}\right)^h, \ T\left(\vec{u}\right) = \vec{0},$$

$$\tilde{g}(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = -\tilde{g}(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = \tilde{g}(\vec{e}_a, \vec{e}_b),$$

$$\tilde{g}(\partial_n, \vec{\varepsilon}_b) = \tilde{g}(\partial_n, \partial_{n+b}) = 0.$$

Теорема. *Пусть* $\left(M, \vec{\xi}, \eta, g, \varphi, D\right)$ *— структура почти контактного метрического многообразия. Допустимая почти пара-гиперкомплексная структура* $(\tilde{D}, J, S, T, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, D)$ *является допустимой пара-гиперкомплексной структурой тогда и только тогда, когда тензор кривизны Схоутена соответствующей внутренней связности равен нулю.*

Доказательство. Используя (1—4), найдем условия, при которых

$$N_J + 2(d\lambda \circ J) \otimes \vec{u} = 0, \ N_S + 2(d\lambda \circ S) \otimes \vec{u} = 0,$$

$$N_T + 2(d\lambda \circ T) \otimes \vec{u} = 0.$$

Для случая эндоморфизма J имеем

$$N_J(\vec{\varepsilon}_a,\vec{\varepsilon}_b)+2d\lambda(\partial_{n+a},\partial_{n+b})=-R^e_{abc}x^{n+c}\partial_{n+e},$$

$$N_J(\partial_{n+a},\partial_{n+b})+2d\lambda(\vec{\varepsilon}_a,\vec{\varepsilon}_b)=2\omega_{ba}\partial_n+R^e_{abc}x^{n+c}\partial_{n+e}-$$
$$-2\omega_{ba}\partial_n == R^e_{abc}x^{n+c}\partial_{n+e},$$

$$N_J(\vec{\varepsilon}_a,\partial_{n+b})=0,\ N_J(\vec{\varepsilon}_a,\partial_n)=N_J(\partial_{n+a},\partial_n)=-x^{n+c}P^b_{ac}\partial_{n+b}.$$

Таким образом, структура J интегрируема тогда и только тогда, когда $R^e_{bac}=0.$ Аналогичные рассуждения можно провести для эндоморфизмов S, T.

Список литературы

1. *Алексеевский Д.В., Медори К., Томассини А.* Однородные пара-кэлеровы многообразия Эйнштейна // УМН. 2009. Т. 64, вып. 1 (385). С. 3—50.

2. *Букушева А.В.* О геометрии контактных метрических пространств с φ-связностью // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер.: Математика. Физика. №17 (214), вып. 40. 2015. С. 20—24.

3. *Букушева А.В.* Слоения на распределениях с финслеровой метрикой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14, №3. С. 247—251.

4. *Букушева А.В.* О некоторых классах почти параконтактных метрических многообразий // Математика. Механика. 2013. №15. С. 8—11.

5. *Букушева А.В., Галаев С.В.* Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Матем. 2013. №4. С. 10—18.

6. *Букушева А.В., Галаев С.В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, №3. С. 17—22.

7. *Галаев С.В.* N-продолженные симплектические связности в почти контактных метрических пространствах // Изв. вузов. Матем. 2017. №3. С. 15—23.

8. *Галаев С.В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью // Математические заметки СВФУ. 2015. Т. 22, №1. С. 25—34.

9. *Галаев С.В.* Гладкие распределения с допустимой гиперкомплексной псевдо-эрмитовой структурой // Вестник Башкирского университета. 2016. Т. 21, №3. С. 551—555.

10. *Галаев С.В.* Допустимые гиперкомплексные структуры на распределениях сасакиевых многообразий // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2016. Т. 16, №3. С. 263—272.

11. *Галаев С.В.* Обобщенный тензор кривизны Вагнера почти контактных метрических пространств // Чебышевский сборник. 2016. Т. 17, №3(59). С. 53—63.

12. *Bukusheva A.V., Galaev S.V.* Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Ser. III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4 (53), №2. P. 13—22.

S. Galaev[1]

[1] Saratov State University

83 Astrakhanskaya St., Saratov, 410012, Russia

sgalaev@mail.ru

Admissible para-hyper-Kähler structures on distributions of almost contact metric manifolds

Submitted on May 26, 2018

The concepts of an admissible (almost) para-hyper-Kähler structure are introduced. On distribution of an almost contact metric manifold, as on the total space of a vector bundle, an admissible almost para-hyper-complex structure is defined. It is proved that the constructed almost para-hyper-Kähler structure is integrable if and only if the distribution is a distribution of zero curvature.

Keywords: almost contact metric structure, admissible para-hyperkähler structure, zero-curvature distribution.

References

1. *Alekseevsky, D. V., Medori, C., Tomassini A.:* Homogeneous para-Kähler Einstein manifolds. Russian Math. Surveys, **64**:1, 1—43 (2009).

2. *Bukusheva, A. V.:* On geometry of the contact metric spaces with ϕ-connection. Belgorod State University. Scientific Bulletin. Mathematics. Physics, **17** (214):40, 20—24 (2015) (in Russian).

3. *Bukusheva, A. V.:* Foliation on distribution with Finslerian metric. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., **14**:3, 247—251 (2014) (in Russian).

4. *Bukusheva, A. V.:* On some classes of almost para-contact metric manifolds. Mathematics. Mechanic, 15, 8—11 (2013) (in Russian).

5. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Connections on distributions and geodesic sprays. Russian Math. (Iz. VUZ), **57**:4, 7—13 (2013).

6. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Almost contact metric structures defined by connection over distribution with admissible Finslerian metric. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., **12**:3, 17—22 (2012) (in Russian).

7. *Galaev, S. V.:* N-extended symplectic connections in almost contact metric spaces. Russian Math. (Iz. VUZ). **61**:3, 12—19 (2017).

8. *Galaev, S. V.:* Almost contact metric structures defined by N-prolonged connection. Mathematical Notes of NEFU, **22**:1, 25—34 (2015) (in Russian).

9. *Galaev, S. V.:* Smooth distributions with admissible hypercomplex pseudo-Hermitian structure. Vestnik Bashkirskogo universiteta, **21**:3, 551—555 (2016) (in Russian).

10. *Galaev, S. V.:* Admissible hypercomplex structures on distributions of Sasakian manifolds. Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform., **16**:3, 263—272 (2016) (in Russian).

11. *Galaev, S. V.:* Generalized Wagner's curvature tensor of almost contact metric spaces. Chebyshevskii Sbornik, **17**:3 (59), 53—63 (2016) (in Russian).

12. *Bukusheva, A. V., Galaev, S. V.:* Almost contact metric structures defined by connection over distribution. Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Series III: Mathematics, Informatics, Physics, **4** (53):2, 13—22 (2011).