ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

А. Д. Иванов

ВЗАИМНО-ПОЛЯРНЫЕ ТРИ-ТКАНИ БОЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В настоящей заметке положительно решается вопрос о существовании три-тканей, полярно сопряженных с четырехмерными три-тканями Боля гиперболического типа, поставленный профессором А.П.Широковым в рецензии на статью автора [1].

1. В работе [1] доказано, что четырехмерное точечное многообразие M_4, несущее три-ткань Боля W_m, всегда можно отобразить в четырехмерное многообразие прямых проективного пространства P_3 так, что поверхности первого и второго семейств поверхностей ткани изобразятся связками прямых, центры которых лежат на квадрике Q, а поверхности третьего семейства -связками прямых, центры которых лежат на плоскости π. При этом трем поверхностям ткани W_m, проходящим через одну точку, соответствуют три связки, центры которых лежат на одной прямой. А так как связка прямых однозначно определяется своим центром, то естественно считать, что точки квадрики Q и плоскости π изображают поверхности три-ткани W_m. Условие прохождения трех поверхностей X, Y, Z ткани через одну точку $M \in M_4$ будет означать, что соответствующие им точки x, y, z лежат на одной прямой $\ell \subset P_3$.

2. Рассмотрим три-ткань гиперболического типа (см. [1]). В этом случае квадрика Q будет кольцевидной и, следовательно, каждой прямой ℓ, пересекающей эту квадрику в точках A_0, A_3, а плоскость π в точке R, в полярите будет соответствовать прямая $\ell' \in P_3$, пересекающая квадрику Q в точках A_1, A_2 и плоскость π в точке R'. Точки A_1, A_2, R' можно считать образами поверхностей другой ткани W'_m, которую назовем полярной для ткани W_m.

Присоединим к квадрике Q и плоскости π проективный автополярный репер $\{A_\alpha\}$ ($\alpha = 0,1,2,3$) так, чтобы ребра A_0A_1, A_0A_2, A_3A_1, A_3A_2 были образующими этой квадрики. Относительно такого репера уравнение квадрики Q будет иметь вид:

$$g_{12}x^1x^2 + g_{03}x^0x^3 = 0. \qquad (1)$$

Нормируя вершины репера $\{A_\alpha\}$ так, чтобы $|g_{12}| = |g_{03}|$, приведем уравнение (1) к виду:

$$\varepsilon x^1x^2 + x^0x^3 = 0, \qquad \varepsilon = \pm 1. \qquad (2)$$

Потребуем, чтобы точки $A_0 + A_3$ и $A_1 + A_2$ лежали в плоскости π. Тогда ее уравнение примет вид:

$$f_1(x^1 - x^2) + f_0(x^0 - x^3) = 0. \qquad (3)$$

Плоскость π пересекает квадрику Q по действительной кривой q второго порядка:

$$\varepsilon x^1x^2 + x^0x^3 = 0, \quad f_1(x^1 - x^2) + f_0(x^0 - x^3) = 0, \qquad (4)$$

которую, как показано в [2], можно считать абсолютом неевклидовой плоскости π.

Пусть P —полюс плоскости π относительно квадрики Q. Так как уравнения квадрики Q и плоскости π имеют вид (2) и (3), то полюс P имеет координаты $(-f_0; -\varepsilon f_1; \varepsilon f_1; f_0)$. Если $f_0^2 \neq f_1^2$, то полюс P не лежит ни на плоскости π, ни на квадрике Q. Проектируя точки A_0, A_3, $A_0 + A_3$ из полюса P на плоскость π, получим плоскую интерпретацию рассматриваемой ткани на неевклидовой плоскости π (см. [2]). Проектируя из полюса P на плоскость π точки A_1, A_2, $A_1 + A_2$, получим плоскую интерпретацию ткани W'_m. В этих интерпретациях поверхности ткани изобразятся точками неевклидовой плоскости π, а условие прохождения трех поверхностей X, Y, Z ткани через одну точку будет означать, что соответствующие им точки x, y, z лежат на одной прямой m (m'), которая является проекцией из полюса P на плоскость π прямой $\ell(\ell')$.

3. Установим связь между три-тканью W_m и полярной ей тканью W'_m.

Проекция m прямой ℓ из полюса P на плоскость π пересекает абсолют q в точках

$$\left(f_0^{-1}\left(f\pm\sqrt{f_1^2+\varepsilon f_0^2}\right); -1; 1; \varepsilon f_0\left(f_1\pm\sqrt{f_1^2+\varepsilon f_0^2}\right)^{-1}\right).$$

Если $\varepsilon=1$, то прямая m всегда пересекает абсолют q в двух действительных точках. Если же $\varepsilon=-1$, то m с q пересекаются в двух действительных точках при условии $f_0^2<f_1^2$, и в двух мнимых точках при условии $f_0^2>f_1^2$.

Определим расположение относительно абсолюта q проекций x', y', z' точек A_0, A_3, A_0+A_3 из полюса P на плоскость π. В выбранном репере эти точки определяются координатами:

$$x'\left(f_0^{-1}(f_0^2+2\varepsilon f_1^2); -\varepsilon f_1; \varepsilon f_1; f_0\right),$$

$$y'\left(f_0; \varepsilon f_1; -\varepsilon f_1; f_0^{-1}(f_0^2+2\varepsilon f_1^2)\right),\quad z'(1; 0; 0; 1).$$

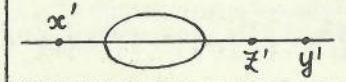
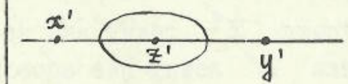
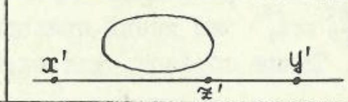
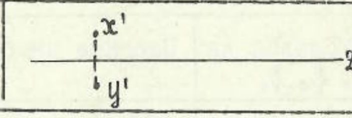
Легко показать, что поляры точек x', y' пересекают абсолют q в двух действительных точках. Следовательно, точки x', y' лежат вне абсолюта q. Поляра точки z' пересекает абсолют q в точках с координатами:

$$\left(1; \varepsilon f_1\left(f_0\pm\sqrt{f_0^2+\varepsilon f_1^2}\right)^{-1}; f_1^{-1}\left(f_0\pm\sqrt{f_0^2+\varepsilon f_1^2}\right); -1\right)$$

При $\varepsilon=1$ точка z' является внешней по отношению к q. При $\varepsilon=-1$ точка z' будет внешней по от-

ношению к q, если $f_0^2<f_1^2$, и внутренней, если $f_0^2>f_1^2$. В случае $\varepsilon=-1$ и $f_0^2=f_1^2$ полюс P лежит в плоскости π, и ткань W_m становится особой тканью типа Γ_2 (см. [2]).

Результаты предыдущих исследований представим таблицей:

ε	Условия на f_0, f_1	Плоские интерпретации	Тип ткани W_m
$\varepsilon=1$			Γ_{13}
$\varepsilon=-1$	$f_0^2<f_1^2$		Γ_{12}
$\varepsilon=-1$	$f_0^2>f_1^2$		Γ_{11}
$\varepsilon=-1$	$f_0^2=f_1^2$		Γ_2

В последнем столбце этой таблицы указан тип ткани в соответствии с классификацией, приведенной в работе [2].

Построим плоскую интерпретацию полярной ткани W'_m. Проекция m' прямой ℓ' из полюса P на плоскость π пересекает абсолют q в точках с координатами:

$$\left(1; f_1^{-1}\left(-f_0\pm\sqrt{f_0^2+\varepsilon f_1^2}\right); \varepsilon f_1\left(-f_0\pm\sqrt{f_0^2+\varepsilon f_1^2}\right)^{-1}; -1\right).$$

При $\varepsilon=1$ прямая всегда пересекает абсолют q в двух действительных точках. При $\varepsilon=-1$ пересечение m' с q будет в двух действительных точках, если $f_0^2>f_1^2$, и в двух мнимых точках, если $f_0^2<f_1^2$.

Проекции x'', y'', z'' точек A_1, A_2, A_1+A_2 из

3 Зак. 3728

полюса P на плоскость π имеют координаты:

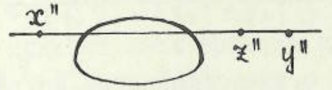
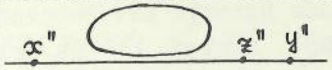
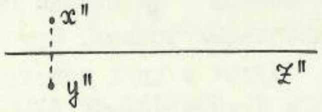
$$x''(-f_0;\ f_1^{-1}(2f_0^2+\varepsilon f_1^2);\ \varepsilon f_1;\ f_0),$$

$$y''(f_0;\ \varepsilon f_1;\ f_1^{-1}(2f_0^2+\varepsilon f_1^2);\ -f_0),\quad z''(0;1;1;0).$$

Поляры точек x'', y'' пересекают абсолют q в двух действительных точках и потому являются внешними по отношению к q. Поляра точки z'' пересекает абсолют q в точках с координатами:

$$\left(f_0^{-1}\left(-f_1\pm\sqrt{f_1^2+\varepsilon f_0^2}\right);\ 1;\ -1;\ \varepsilon f_0\left(-f_1\pm\sqrt{f_1^2+\varepsilon f_0^2}\right)\right).$$

При $\varepsilon=1$ точка z'' лежит вне абсолюта q. При $\varepsilon=-1$ точка z'' лежит вне абсолюта q, если $f_0^2<f_1^2$, и внутри q, если $f_0^2>f_1^2$. В случае $\varepsilon=-1$ и $f_0^2=f_1^2$ мы вновь приходим к особой ткани типа Γ_2. Таким образом, для ткани W_m' имеем:

ε	Условия на f_0, f_1	Плоские интерпретации	Тип ткани W_m'
$\varepsilon=1$			Γ_{13}'
$\varepsilon=-1$	$f_0^2<f_1^2$		Γ_{11}'
$\varepsilon=-1$	$f_0^2>f_1^2$		Γ_{12}'
$\varepsilon=-1$	$f_0^2=f_1^2$		Γ_2

Сравнивая плоские интерпретации тканей W_m и

W_m', видим, что ткани типов Γ_{13} и Γ_2 полярны самим себе, ткани типов Γ_{11} и Γ_{12} взаимно полярны друг другу.

Список литературы

1. И в а н о в А.Д. Об интерпретации четырехмерных тканей Боля в трехмерном проективном пространстве.-В кн.: Геометрия однородных пространств.М.,1973,с.42-57.(МГПИ им.В.И.Ленина).

2. И в а н о в А.Д. Четырехмерные ткани Боля и плоские геометрии Кэли-Клейна.-Тезисы докл.IУ Прибалт.геомет.конф. Тарту,1973,с.44-46.