УДК 514.75

***А.В. Вялова***
*(Калининградский государственный университет)*

# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНЕСЕНИЯ В ПУЧКЕ СВЯЗНОСТЕЙ 2-го ТИПА НА ТОЧЕЧНО-ПЛОСКОСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В n-мерном проективном пространстве $P_n$ точечно-плоскостная поверхность $S_{h+r}$ рассматривается как вырожденное многообразие [1] троек $(A, L_h, T_m)$, причем точка $A$ $(A \in L_h \subset T_m)$ и касательная плоскость $T_m$ описывают m-мерные семейства, а образующая $L_h$ – $r$-мерное семейство $(r = m - h)$ [2]. Произведено композиционное оснащение поверхности $S_{h+r}$, состоящее в задании полей трех плоскостей. Введены понятия специального и комбинационного оснащений, которые использованы при описании параллельных перенесений оснащающих плоскостей в пучке связностей 2-го типа.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$I, \ldots = \overline{1,n};\ u, \ldots = \overline{1,m};\ \alpha, \ldots = \overline{m+1,n};\ u = (a,i);\ a, \ldots = \overline{1,h};\ i, \ldots = \overline{h+1,m}.$$

Уравнения поверхности $S_{h+r}$ в репере $R_1 = \{A, A_a, A_i, A_\alpha\}$, где точки $A$ и $A_a$ помещены на плоскую образующую $L_h$, а точки $A_i$ – в касательную плоскость $T_m$, имеют вид [3]:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_a^i = \Lambda_{aj}^i \omega^j, \quad \omega_a^\alpha = \Lambda_{ai}^\alpha \omega^i, \quad \omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j + \Lambda_{ia}^\alpha \omega^a.$$

Объект $\Lambda = \{\Lambda_{aj}^i, \Lambda_{ai}^\alpha = \Lambda_{ia}^\alpha, \Lambda_{ij}^\alpha\}$ является фундаментальным объектом многообразия $S_{h+r}$.

С поверхностью $S_{h+r}$ ассоциировано главное расслоение $G(S_{h+r})$, базой которого является сама поверхность, а типовым слоем – подгруппа стационарности $G \subset GP(n)$ тройки $(A, L_h, T_m)$, причем $\dim G = n(n-m+1) + mr + h^2$.

Базисные формы $\omega^a, \omega^i$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \upsilon_j^i \ (\upsilon_j^i = \omega_j^i - \Lambda_{aj}^i \omega^a), \quad D\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a + \omega^i \wedge \omega_i^a.$$

Групповая связность $\Gamma$ в главном расслоении $G(S_{h+r})$ задана по Г.Ф. Лаптеву [4] с помощью поля объекта связности:

$$\Gamma = \{\Gamma_{ab}, \Gamma_{ai}, \Gamma_{bc}^a, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ja}^i, \Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ib}^a, \Gamma_{ij}^a, \Gamma_{ia}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{\alpha a}, \Gamma_{\alpha i}, \Gamma_{\alpha b}^a, \Gamma_{\alpha i}^a, \Gamma_{\beta a}^\alpha, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{\alpha a}^i, \Gamma_{\alpha j}^i\}.$$

Объект связности $\Gamma$ содержит 3 простейших [5] и 15 простых подобъектов, из которых выпишем следующие:

$$\Gamma_1 = \{\Gamma_{bc}^a, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ab}, \Gamma_{ai}\}, \ \Gamma_2 = \{\Gamma_{ib}^a, \Gamma_{ij}^a, \Gamma_{bc}^a, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ja}^i, \Gamma_{jk}^i\},$$

$$\Gamma_3 = \{\Gamma_{ia}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{ab}, \Gamma_{ai}, \Gamma_{bc}^a, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ib}^a, \Gamma_{ij}^a, \Gamma_{ja}^i, \Gamma_{jk}^i\},$$

$$\Gamma_4 = \{\Gamma_{\alpha a}^i, \Gamma_{\alpha j}^i, \Gamma_{\beta a}^\alpha, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{ja}^i, \Gamma_{jk}^i\},$$

$$\Gamma_5 = \{\Gamma_{\alpha b}^a, \Gamma_{\alpha i}^a, \Gamma_{\alpha a}^i, \Gamma_{\alpha j}^i, \Gamma_{\beta a}^\alpha, \Gamma_{\beta i}^\alpha, \Gamma_{bc}^a, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ib}^a, \Gamma_{ij}^a, \Gamma_{ja}^i, \Gamma_{jk}^i\}.$$

Произведено композиционное оснащение поверхности $S_{h+r}$, состоящее в задании на ней полей трех плоскостей

$$P_{h-1} : A \oplus P_{h-1} = L_h, \ P_{m-h-1} : L_h \oplus P_{m-h-1} = T_m,$$
$$P_{n-m-1} : T_m \oplus P_{n-m-1} = P_n,$$

причем оснащающие плоскости определены совокупностями точек

$$C_a = A_a + \lambda_a A, \ C_i = A_i + \lambda_i^a A_a + \lambda_i A,$$
$$C_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^a A_a + \lambda_\alpha^i A_i + \lambda_\alpha A.$$

Объект $\lambda = \{\lambda_a, \lambda_i^a, \lambda_i, \lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha^i, \lambda_\alpha\}$ является оснащающим квазитензором поверхности $S_{h+r}$ и содержит 3 простейших

$\{\lambda_a\}, \{\lambda_i^a\}, \{\lambda_a^i\}$ и 3 простых $\{\lambda_i, \lambda_i^a\}$, $\{\lambda_\alpha, \lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha^i\}$, $\{\lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha^i\}$ подобъекта.

Найдем дифференциалы точек $C_a$, $C_i$, $C_\alpha$, подставляя вместо дифференциалов компонент оснащающего квазитензора $\lambda$ их выражения через ковариантные дифференциалы [6]. В получившиеся выражения подставим охват компонент объекта связности из пучка 2-го типа

$$\begin{gathered}
dC_a = \theta C_a + [\omega_a^b + (-\lambda_j^b \Lambda_{ai}^j - \lambda_\alpha^b \Lambda_{ai}^\alpha + \lambda_\alpha^j \lambda_j^b \Lambda_{ai}^\alpha - \lambda_a \lambda_i^b)\omega^i + \lambda_a \omega^b] C_b + \\
+ (\Lambda_{aj}^i - \lambda_\alpha^i \Lambda_{aj}^\alpha + \delta_j^i \lambda_a)\omega^j C_i + \Lambda_{ai}^\alpha \omega^i C_\alpha + (\overset{2}{\nabla} \lambda_a + t_{au}\omega^u) A, \\
dC_i = \theta C_i + [\omega_i^j + (-\lambda_\alpha^j \Lambda_{ik}^\alpha - \lambda_i^a \Lambda_{ak}^j + \lambda_i^a \lambda_\alpha^j \Lambda_{ak}^\alpha + \delta_k^j \lambda_i)\omega^k - \lambda_\alpha^j \Lambda_{ia}^\alpha \omega^a] C_j + \\
+ [(\Lambda_{ij}^\alpha + \lambda_i^a \Lambda_{aj}^\alpha)\omega^j + \Lambda_{ia}^\alpha \omega^a] C_\alpha + (\overset{2}{\nabla} \lambda_i^a + t_{iu}^a \omega^u) C_a + (\overset{2}{\Omega}_i + T_{iu}\omega^u) A, \\
dC_\alpha = \theta C_\alpha + (\omega_\alpha^\beta + \lambda_\alpha^u \Lambda_{ui}^\beta \omega^i + \lambda_\alpha^i \Lambda_{ia}^\beta \omega^a) C_\beta + (\overset{2}{\nabla} \lambda_\alpha^i + t_{\alpha u}^i \omega^u) C_i + \\
+ (\overset{2}{\Omega}{}_\alpha^a + T_{\alpha u}^a \omega^u) C_a + (\overset{2}{\Omega}_\alpha + T_{\alpha u}\omega^u) A.
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
t_{ai} = \lambda_{ai} + \lambda_j^b \lambda_b \Lambda_{ai}^j - \lambda_j \Lambda_{ai}^j + \lambda_\alpha^u \lambda_u \Lambda_{ai}^\alpha - \lambda_\alpha^j \lambda_j^b \Lambda_{ai}^\alpha \lambda_b - \lambda_\alpha \Lambda_{ai}^\alpha + \lambda_a \lambda_b \lambda_i^b - \lambda_a \lambda_i, \\
t_{ab} = \lambda_{ab} - \lambda_a \lambda_b, \quad t_{ib}^a = \lambda_{ib}^a - \lambda_\alpha^a \Lambda_{ib}^\alpha + \lambda_\alpha^j \lambda_j^a \Lambda_{ib}^\alpha + \delta_b^a \lambda_i, \\
t_{ij}^a = \lambda_{ij}^a - \lambda_\alpha^a \Lambda_{ij}^\alpha + \lambda_\alpha^k \lambda_k^a \Lambda_{ij}^\alpha - \lambda_i^b \lambda_k^a \Lambda_{bj}^k - \lambda_i^b \lambda_\alpha^a \Lambda_{bj}^\alpha + \lambda_i^b \lambda_\alpha^k \lambda_k^a \Lambda_{bj}^\alpha - \lambda_i \lambda_j^a, \\
t_{ij} = \lambda_{ij} + \lambda_\alpha^k \lambda_k \Lambda_{ij}^\alpha - \lambda_\alpha \Lambda_{ij}^\alpha - \lambda_i^a \lambda_k \Lambda_{aj}^k + \lambda_k \lambda_\alpha^k \lambda_i^a \Lambda_{aj}^\alpha - \lambda_i^a \lambda_\alpha \Lambda_{aj}^\alpha - \lambda_i \lambda_j, \\
t_{ia} = \lambda_{ia} - \lambda_\alpha \Lambda_{ia}^\alpha + \lambda_j \lambda_\alpha^j \Lambda_{ia}^\alpha, \quad t_{\alpha i}^a = \lambda_{\alpha i}^a - \lambda_\alpha^b \lambda_\beta^a \Lambda_{bi}^\beta - \lambda_\beta^a \lambda_\alpha^j \Lambda_{ji}^\beta, \\
t_{\alpha b}^a = \lambda_{\alpha b}^a - \lambda_\beta^a \lambda_\alpha^i \Lambda_{ib}^\beta + \delta_b^a \lambda_\alpha, \quad t_{\alpha a}^i = \lambda_{\alpha a}^i - \lambda_\alpha^j \lambda_\beta^i \Lambda_{ja}^\beta, \\
t_{\alpha i} = \lambda_{\alpha i} - \lambda_\alpha^a \lambda_\beta \Lambda_{ai}^\beta - \lambda_\beta \lambda_\alpha^j \Lambda_{ji}^\beta, \quad t_{\alpha a} = \lambda_{\alpha a} - \lambda_\alpha^i \lambda_\beta \Lambda_{ia}^\beta, \\
t_{\alpha j}^i = \lambda_{\alpha j}^i + \lambda_\alpha^a \Lambda_{aj}^i - \lambda_\alpha^u \lambda_\beta^i \Lambda_{uj}^\beta + \delta_j^i \lambda_\alpha;
\end{gathered} \tag{2}$$

$$T_{ij}=t_{ij}-\lambda_a t^a_{ij},\quad T_{ia}=t_{ia}-\lambda_b t^b_{ia},\quad T_{\alpha a}=t_{\alpha a}-\lambda_u t^u_{\alpha a}+\lambda_b\lambda^b_i t^i_{\alpha a},$$
$$T_{\alpha i}=t_{\alpha i}-\lambda_u t^u_{\alpha i}+\lambda_a\lambda^a_j t^j_{\alpha i},\quad T^a_{\alpha b}=t^a_{\alpha b}-\lambda^a_i t^i_{\alpha b},\ T^a_{\alpha i}=t^a_{\alpha i}-\lambda^a_j t^j_{\alpha i}; \tag{3}$$

$$\Omega_i=\nabla\lambda_i-\lambda_a\nabla\lambda^a_i,\ \Omega^a_\alpha=\nabla\lambda^a_\alpha-\lambda^a_i\nabla\lambda^i_\alpha,$$
$$\Omega_\alpha=\nabla\lambda_\alpha-\lambda_i\nabla\lambda^i_\alpha-\lambda_a\nabla\lambda^a_\alpha+\lambda^a_i\lambda_a\nabla\lambda^i_\alpha, \tag{4}$$

Объект $t=\{t_{ai},t_{ab},t^a_{ij},t^a_{ib},t_{ij},t_{ia},t^a_{\alpha b},t^a_{\alpha i},t^i_{\alpha a},t^i_{\alpha j},t_{\alpha i},t_{\alpha a}\}$ является тензором и содержит 3 простейших подтензора $\{t_{ab}\}$, $\{t^a_{ib}\}$, $\{t^i_{\alpha a}\}$ и 9 простых подтензоров $\{t_{ia},t^a_{ib}\}$, $\{t^a_{ib},t^a_{ij}\}$, $\{t_{ia},t_{ij},t^a_{ib},t^a_{ij}\}$, $\{t^a_{\alpha i},t^a_{\alpha b},t^i_{\alpha a},t^i_{\alpha j}\}$, $\{t^a_{\alpha b},t^i_{\alpha a}\}$, $\{t_{\alpha a},t_{\alpha i},t^a_{\alpha i},t^i_{\alpha j},t^a_{\alpha b},t^i_{\alpha a}\}$, $\{t^i_{\alpha a},t^i_{\alpha j}\}$, $\{t_{\alpha a},t^a_{\alpha b},t^i_{\alpha a}\}$, $\{t_{ab},t_{ai}\}$. Объект $T=\{T_{\alpha a},T_{\alpha i},T_{ij},T_{ib},T^a_{\alpha i},T^a_{\alpha b}\}$ также является тензором и содержит 3 простейших подтензора $\{T_{\alpha a}\}$, $\{T_{ia}\}$, $\{T^a_{\alpha b}\}$ и 3 простых подтензора $\{T_{\alpha a},T_{\alpha i}\}$, $\{T_{ij},T_{ia}\}$, $\{T^a_{\alpha b},T^a_{\alpha i}\}$.

**Определение.** *Композиционное оснащение точечно-плоскостной поверхности $S_{h+r}$ назовем специальным в случае обращения тензора* $t$ *в нуль:*

$$\text{a)}\ t_{ia}=0,\ t_{ij}=0,\ \text{b)}\ t^a_{ib}=0,\ t^a_{ij}=0,\ \text{c)}\ t^a_{\alpha b}=0,\ t^a_{\alpha i}=0,$$
$$\text{d)}\ t^i_{\alpha a}=0,\ t^i_{\alpha j}=0,\ \text{e)}\ t_{\alpha a}=0,\ t_{\alpha i}=0,\ \text{f)}\ t_{ab}=0,\ t_{ai}=0. \tag{5}$$

*Такое оснащение назовем $a_{12}b_{12}c_{12}d_{12}e_{12}f_{12}$ -специальным. В случае выполнения части условий в названии специального оснащения будут упоминаться только соответствующие буквы. Если в условии фигурирует линейная комбинация (3) левых частей некоторых условий из (5), то назовем композиционное оснащение комбинационным с прописной буквой условия, содержащего первое слагаемое комбинации.*

***Замечание.*** Если композиционное оснащение $a_{12}b_{12}$ -специальное, то оно является $A_{12}$ -комбинационным. Аналогично, если оснащение $c_{12}d_{12}$ -специальное, то оно $C_{12}$ -комбинационное. Наконец, $c_{12}d_{12}e_{12}$-специальное оснащение является $C_{12}E_{12}$-комбинационным.

Из формул (1) следуют результаты:

**Теорема 1.** *Оснащающая плоскость* $P_{h-1}$ *переносится параллельно в пучке групповых подсвязностей* $\overset{2}{\Gamma}_1$ *тогда и только тогда, когда она смещается: а) в гиперплоскости* $P_{n-1} = P_{h-1} \oplus P_{m-h-1} \oplus P_{n-m-1}$, *если композиционное оснащение –* $f_{12}$*-специальное; б) произвольно в случае* $f_{12}$*-неспециального композиционного оснащения.*

**Теорема 2.** *Оснащающая плоскость* $P_{m-h-1}$ *переносится параллельно тогда и только тогда, когда она смещается а) в плоскости* $P_{n-h} = P_{m-h-1} \oplus P_{n-m-1} \oplus A$, *причем перенесение производится относительно пучка групповых подсвязностей* $\overset{2}{\Gamma}_2$ *в случае* $b_{12}$*-специального композиционного оснащения; б) в гиперплоскости* $P_{n-1}$ , *причем перенесение осуществляется в пучке групповых подсвязностей* $\overset{2}{\Gamma}_3$ *в случае* $A_{12}$ *-комбинационного оснащения; в) в плоскости Бортолотти* $P_{n-h-1} = P_{m-h-1} \oplus P_{n-m-1}$, *причем перенесение производится относительно пучка групповых подсвязностей* $\overset{2}{\Gamma}_3$ *в случае* $a_{12}b_{12}$ *-специального композиционного оснащения; г) произвольно, причем перенесение осуществляется в пучке групповых подсвязностей* $\overset{2}{\Gamma}_3$ *в случае* $a_{12}b_{12}$ *-неспециального композиционного оснащения.*

**Теорема 3.** *Оснащающая плоскость* $P_{n-m-1}$ *переносится параллельно тогда и только тогда, когда она смещается: а) в плоскости* $P_{n-r} = P_{h-1} \oplus P_{n-m-1} \oplus A$, *причем перенесение производится в пучке групповых подсвязностей* $\overset{2}{\Gamma}_4$, *если компози-*

*ционное оснащение –* $d_{12}$ *-специальное; б) в плоскости* $P_{n-h}$*, причем перенесение осуществляется в пучке групповых подсвязностей* $\overset{2}{\Gamma}_5$ *в случае* $C_{12}$ *-комбинационного оснащения; в) в гиперплоскости* $P_{n-1}$*, причем перенесение производится относительно пучка групповых связностей* $\overset{2}{\Gamma}$ *в случае* $E_{12}$ *-комбинационного оснащения; г) в нормали 1-го рода А.П. Нордена* $P_{n-m}$ *, причем перенесение осуществляется в пучке групповых подсвязностей* $\overset{2}{\Gamma}_5$ *в случае* $c_{12}d_{12}$ *-специального композиционного оснащения; д) в плоскости* $P_{n-r-1} = P_{h-1} \oplus P_{n-m-1}$*, причем перенесение производится относительно пучка групповых связностей* $\overset{2}{\Gamma}$ *в случае* $d_{12}$ *-специального композиционного и* $E_{12}$ *-комбинационного оснащения; е) неподвижна, причем перенесение осуществляется в пучке групповых связностей* $\overset{2}{\Gamma}$ *в случае* $c_{12}d_{12}e_{12}$ *-специального композиционного оснащения; ж) произвольно, причем перенесение производится относительно пучка групповых связностей* $\overset{2}{\Gamma}$ *в случае* $\mathrm{c}_{12}\mathrm{d}_{12}\mathrm{e}_{12}$ *-неспециального композиционного оснащения.*

***Замечание.*** Все результаты, полученные для пучка связностей 2-го типа, будут справедливы и для связности 2-го типа.

### *Список литературы*

1. *Малаховский В. С.* Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1969. Т. 2. С. 179 – 206.

2. *Шевченко Ю.И.* Оснащение плоскостной поверхности, рассматриваемой с трех точек зрения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1993. Вып. 24. С. 112 – 123.

3. *Skriagina A.* The structure of equipment of centered plane surface // New geometry of Nature. Kazan, 2003. Vol. 1. P. 197 – 200.

4. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5 – 247.

5. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000. 113 с.

6. *Скрягина А.В.* Композиционное оснащение плоскостей поверхности // Междунар. конф. по геом. и анализу. Пенза, 2003. С. 87 – 93.

A. Vyalova

THE PARALLEL DISPLACEMENTS IN THE BUNCH OF CONNECTIONS OF THE SECOND TYPE ON THE POINT-PLANE SURFACE

In n-dimensional projective space $P_n$ point-plane surface $S_{h+r}$ as degenerated family of triples $(A, L_h, T_m)$, where point A $(A \in L_h \subset T_m)$ and tangent plane $T_m$ describes m-dimensional families, generator $L_h$ – r-dimensional family (r = m – h), is considered. Composition equipment of surface $S_{h+r}$, consisted in setting fields of three planes, is made. The concepts of special and combination equipments, which are used by describing of parallel displacements the equipping planes in the bunch of connection of the second type, are entered.

УДК 512.813.52

***А.И. Долгарев***

*(Пензенский государственный университет)*

## СЕТЕВЫЕ УРАВНЕНИЯ 3-МЕРНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ОДУЛЕЙ ЛИ

Рассматриваются *одули*, обобщающие линейные пространства. Это одули Ли, определенные на группах Ли посредством задания внешней операции умножения элементов группы Ли на действительные числа. *Сетью* одуля называется множество 1-параметрических пододулей и