4. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. Семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

5. *Евтушик Л. Е.* Уникальная школа Картана-Лаптева, ее сбережение // Дифф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2008. Вып. 39. С. 44—62.

6. *Рыбников А. К.* Об аффинных связностях второго порядка // Матем. заметки. 1981. Т. 29, вып. 2. С. 279—290.

7. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

8. *Уорнер Ф.* Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М., 1987.

9. *Catuogno P.* On stochastic parallel transport and prolongation of connections // Revista de la Unión Mathemática Argentina. 1999. Vol. 41, №3. P. 107-118.

10. *Emery M.* An invitation to second-order stochastic differential geometry. 2007. URL: https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00145073 (дата обращения: 20.03.2017).

11. *Шевченко Ю. И.* Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий // Дифф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 168—177.

12. *Josef Mikes et al.* Differential geometry of special mappings. Olomouc, 2015.

13. *Shevchenko Ju. I., Skrydlova E. V.* About non-holonomicity of quotient manifold of holonomic distribution on semi-holonomic smooth manifold // Междун. конф. по алгебре, анализу и геометрии. Казань, 2016. С. 67—68.

Об авторе

Юрий Иванович Шевченко — канд. физ.–мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: ESkrydlova@kantiana.ru

About the author

Dr Yuri Shevchenko – Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: ESkrydlova@kantiana.ru

УДК 514.75

Ю. И. Попов

О ПОЛЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ $\mathscr{H}$-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Продолжается построение геометрических объектов гиперполосного распределения ($\mathscr{H}$-распределения) аффинного пространства A_n в дифференциальных окрестностях 1—3-го порядков. В результате построены (найдены) внутренним инвариантным образом ряд новых нормализаций в смысле Нордена основных структурных подрасслоений данного $\mathscr{H}$-распределения.

A creation of geometric objects of the hyperband distribution ($\mathscr{H}$-distribution) of affine space A_n in the differential 1–3rd orders neighborhoods is continued. As a result a number of new normalization in Norden's sense of the main structural subbundles of this $\mathscr{H}$-distribution are constructed (are found) internally invariantly.

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта.
Сер.: Физико-математические и технические науки. 2017. № 2. С. 13 – 23.

Ключевые слова: геометрический объект, гиперполостное распределение, аффинное пространство, дифференциальная окрестность, подрасслоение, нормализация Нордена.

Key words: geometric object, hyperband distribution, affine space, differential neighborhood, subbundle, Norden's normalization.

Во всей работе использована следующая схема индексов:

$$J, K, L = \overline{1,n};\ \alpha,\beta,\gamma = \overline{m+1,n-1};\ i,j,k = \overline{1,m};\ a,b,c = \overline{1,n-1};\ \hat\alpha, \hat\beta, \hat\gamma = \overline{m+1,n}.$$

Введение

1. Известно [1], что в дифференциальной окрестности 2-го порядка регулярное $\mathscr{H}$-распределение аффинного пространства A_n задается относительно репера R^1 уравнениями

$$\omega_i^n = \Lambda_{iL}^n \omega^L,\ \omega_i^\alpha = \Lambda_{iL}^\alpha \omega^L,\ \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha\hat\beta}^n \omega^{\hat\beta},\ \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha L}^i \omega^L, \tag{1}$$

где функции в системе (1) удовлетворяют уравнениям

$$\nabla\Lambda_{ij}^n = \Lambda_{ijK}^n \omega^K,\ \nabla\Lambda_{i\alpha}^n = \Lambda_{i\alpha K}^n \omega^K,\ \nabla\Lambda_{\alpha\beta}^n = \Lambda_{\alpha\beta K}^n \omega^K, \tag{2}$$

$$\begin{cases} \nabla\Lambda_{in}^n - \Lambda_{ij}^n \omega_n^j - \Lambda_{i\alpha}^n \omega_n^\alpha = \Lambda_{inK}^n \omega^K,\ \nabla\Lambda_{\alpha n}^n - \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_n^\beta = \Lambda_{\alpha nK}^n \omega^K, \\ \nabla\Lambda_{\alpha j}^i = \Lambda_{\alpha jK}^i \omega^K,\ \nabla\Lambda_{\alpha\beta}^i + \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_n^i = \Lambda_{\alpha\beta K}^i \omega^K, \\ \nabla\Lambda_{\alpha n}^i - \Lambda_{\alpha j}^i \omega_n^j - \Lambda_{\alpha\beta}^i \omega_n^\beta + \Lambda_{\alpha n}^n \omega_n^i = \Lambda_{\alpha nK}^i \omega^K, \\ \nabla\Lambda_{ij}^\alpha + \Lambda_{ij}^n \omega_n^\alpha = \Lambda_{ijK}^\alpha \omega^K,\ \nabla\Lambda_{i\beta}^\alpha + \Lambda_{i\beta}^n \omega_n^\alpha = \Lambda_{i\beta K}^\alpha \omega^K, \\ \nabla\Lambda_{in}^\alpha - \Lambda_{ij}^\alpha \omega_n^j - \Lambda_{i\beta}^\alpha \omega_n^\beta + \Lambda_{in}^n \omega_n^\alpha = \Lambda_{inK}^\alpha \omega^K \end{cases} \tag{3}$$

и соотношениям

$$\Lambda_{\alpha n}^n \Lambda_{[jK]}^n + \Lambda_{\alpha\beta}^n \Lambda_{[jK]}^\beta + \Lambda_{i[j}^n \Lambda_{|\alpha|K]}^i = 0.$$

Заметим, что коэффициенты в правых частях уравнений (2), (3), вообще говоря, не симметричны по нижним индексам.

Геометрические объекты

$$\Gamma_1 = \{\Lambda_{iL}^n, \Lambda_{iL}^\alpha, \Lambda_{\alpha\hat\beta}^n\}$$

и

$$\Gamma_2 = \{\Gamma_1, \Lambda_{\alpha L}^i, \Lambda_{iLK}^n, \Lambda_{iLK}^\alpha, \Lambda_{\alpha\hat\beta K}^n\}$$

являются *фундаментальными объектами соответственно 1-го и 2-го порядка* регулярного $\mathscr{H}$-распределения.

Из уравнений (2) следует, что совокупность функций

$$\{\Lambda_{ab}^n\} \overset{\text{def}}{=} \{\Lambda_{ij}^n, \Lambda_{i\alpha}^n, \Lambda_{\alpha\beta}^n\}$$

образует тензор 1-го порядка

$$\nabla\Lambda^n_{ab} = \Lambda^n_{abK}\omega^K.$$

Для регулярного $\mathscr{H}$ -распределения фундаментальные $\{\Lambda^n_{ij}\}$, $\{\Lambda^n_{\alpha\beta}\}$, $\{\Lambda^n_{ab}\}$ тензоры соответственно Λ-, *L*-, *H*-подрасслоений невырожденные [1] и потому имеют соответственно обращенные фундаментальные тензоры 1-го порядка $\{\Lambda^{jk}_n\}$, $\{\Lambda^{\beta\gamma}_n\}$, $\{\Lambda^{bc}_n\}$, компоненты которых удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla\Lambda^{ij}_n = \Lambda^{ij}_{nK}\omega^K,\ \nabla\Lambda^{\alpha\beta}_n = \Lambda^{\alpha\beta}_{nK}\omega^K,\ \nabla\Lambda^{ab}_n = \Lambda^{ab}_{nK}\omega^K$$

и соотношениям

$$\Lambda^n_{ij}\Lambda^{jk}_n = \delta^k_i,\ \Lambda^n_{\alpha\beta}\Lambda^{\beta\gamma}_n = \delta^\gamma_\alpha,\ \Lambda^n_{ab}\Lambda^{bc}_n = \delta^c_a.$$

Для дальнейшего изложения приведем соотношения [2], определяющие биекции Бомпьяни — Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода соответственно H-, L-, Λ-подрасслоений заданного $\mathscr{H}$ -распределения:

$$\nu^c_n = -\Lambda^{ca}_n\nu_a + \mathcal{A}^c_n,\ \nu_a = -\Lambda^n_{ab}\nu^b_n - \mathcal{A}_a, \tag{4}$$

$$\nu^\alpha_n = -\Lambda^{\alpha\beta}_n\nu_\beta + \mathcal{A}^\alpha_n,\ \nu_\alpha = -\Lambda^n_{\alpha\beta}\nu^\beta_n - \mathcal{A}_\alpha, \tag{5}$$

$$\nu^i_n = -\Lambda^{ij}_n\nu_j + \mathcal{A}^i_n,\ \nu_i = -\Lambda^n_{ij}\nu^j_n - \tilde{\mathcal{A}}_i, \tag{6}$$

$$\nu^c_n + \omega^c_n = \nu^c_{nK}\omega^K,\ \nabla\nu_a = \nu_{aK}\omega^K,$$

$$\nu^\alpha_n + \omega^\alpha_n = \nu^\alpha_{nK}\omega^K,\ \nabla\nu_\alpha = \nu_{\varepsilon K}\omega^K,$$

$$\nu^i_n + \omega^i_n = \nu^i_{nK}\omega^K,\ \nabla\nu_i = \nu_{iK}\omega^K.$$

2. Итак, продолжим построение геометрических объектов с использованием симметрических фундаментальных тензоров 1-го порядка [3]:

$$a^n_{ij} = \frac{1}{2}(\Lambda^n_{ij} + \Lambda^n_{ji}),\ a^n_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\Lambda^n_{\alpha\beta} + \Lambda^n_{\beta\alpha}),\ a^n_{ab} = \frac{1}{2}(\Lambda^n_{ab} + \Lambda^n_{ba}),$$

$$a^{ij}_n = \frac{1}{2}(\Lambda^{ij}_n + \Lambda^{ji}_n),\ a^{\alpha\beta}_n = \frac{1}{2}(\Lambda^{\alpha\beta}_n + \Lambda^{\beta\alpha}_n),\ a^{ab}_n = \frac{1}{2}(\Lambda^{ab}_n + \Lambda^{ba}_n).$$

По аналогии с функциями $V^\alpha_n = \dfrac{1}{m}\Lambda^\alpha_{ij}\Lambda^{ji}_n$ [4] введем в рассмотрение функции 1-го порядка

$$\tilde{V}^\alpha_n = \frac{1}{m}\Lambda^\alpha_{ij}a^{ji}_n,\ \nabla\tilde{V}^\alpha_n + \omega^\alpha_n = \tilde{V}^\alpha_{nK}\omega^K. \tag{7}$$

Квазитензор $\{\tilde{V}^\alpha_n\}$ позволяет найти ряд абсолютных тензоров 1-го порядка

$$\begin{cases} c_{ij}^{\alpha} = \Lambda_{ij}^{\alpha} - \tilde{V}_n^{\alpha} a_{ij}^n, \ \nabla c_{ij}^{\alpha} = c_{ijK}^{\alpha} \omega^K, \\ \tilde{c}_{ij}^{\alpha} = \dfrac{1}{2}(c_{ij}^{\alpha} + c_{ji}^{\alpha}), \ \nabla \tilde{c}_{ij}^{\alpha} = \tilde{c}_{ijK}^{\alpha} \omega^K, \\ c_{nj}^{\alpha i} = \tilde{c}_{sj}^{\alpha} a_n^{is}, \ \nabla c_{nj}^{\alpha i} \equiv 0, \\ c_{nn}^{\alpha\beta} = c_{ns}^{\alpha k} c_{nk}^{\beta s}, \ \nabla c_{nn}^{\alpha\beta} \equiv 0. \end{cases} \tag{8}$$

Поле квазитензора $\{\tilde{V}_n^{\alpha}\}$ (7) задает поле нормалей 1-го рода L-подрасслоения в окрестности 1-го порядка. В силу соответствия Бомпьяни — Пантази (5) находим охват объекта $\{\tilde{V}_{\alpha}\}$:

$$\tilde{V}_{\alpha} = -\Lambda_{\alpha\beta}^n \tilde{V}_n^{\beta} - \mathcal{A}_{\alpha}, \ \nabla \tilde{V}_{\alpha} = \tilde{V}_{\alpha K} \omega^K. \tag{9}$$

Поле объекта $\{\tilde{V}_{\alpha}\}$ (9) задает поле нормалей 2-го рода L-подрасслоения. *Таким образом, $\mathcal{H}$-распределение в дифференциальной окрестности 1-го порядка порождает внутреннюю нормализацию $(\tilde{V}_n^{\alpha}, \tilde{V}_{\alpha})$ L-подрасслоения.*

Окрестность 2-го порядка

3. В дифференциальной окрестности 2-го порядка рассмотрим поле квазитензора $\{\xi_n^i\}$, где

$$\xi_n^i \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{n-m-1} \Lambda_{\alpha\beta}^i a_n^{\alpha\beta}, \ \nabla \xi_n^i + \omega_n^i = \xi_{nK}^i \omega^K. \tag{10}$$

В биекции (6) квазитензору (10) соответствует тензор $\{\xi_i\}$, компоненты которого $\xi_i = -\Lambda_{ij}^n \xi_n^i - \mathcal{A}_i$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \xi_i = \xi_{iK} \omega^K.$$

Итак, в окрестности 2-го порядка имеем внутреннюю нормализацию (ξ_n^i, ξ_i) в смысле Нордена Λ-подрасслоения.

Далее, следуя работе [1], введем в окрестности 2-го порядка следующие геометрические объекты $\mathcal{H}$-распределения, которые понадобятся нам для дальнейшего построения (рядом выписываются дифференциальные уравнения соответствующих функций):

$$\begin{cases} b_{n\alpha}^{ij} = \Lambda_{\alpha k}^i a_n^{kj}, \ \nabla b_{n\alpha}^{ij} \equiv 0, \\ \tilde{b}_{n\alpha}^{ij} = \dfrac{1}{2}(b_{n\alpha}^{ij} + b_{n\alpha}^{ji}), \ \nabla \tilde{b}_{n\alpha}^{ij} \equiv 0, \\ b_{\alpha k}^i = \tilde{b}_{n\alpha}^{ij} a_{jk}^n, \ \nabla b_{\alpha k}^i \equiv 0, \\ b_{\alpha\beta} = b_{\alpha k}^j b_{\beta j}^k, \ \nabla b_{\alpha\beta} \equiv 0, \\ b_{n\alpha}^{\beta} = \tilde{b}_{n\alpha}^{ij} \tilde{c}_{ij}^{\beta}, \ \nabla b_{n\alpha}^{\beta} \equiv 0, \\ \tilde{b}_{\alpha}^{n\gamma} b_{n\gamma}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}, \ \nabla \tilde{b}_{\alpha}^{n\gamma} \equiv 0. \end{cases} \tag{11}$$

Функции (11) позволяют построить невырожденный абсолютный тензор $\{B^n_{\alpha\beta}\}$:

$$B^n_{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}(\tilde b^{n\gamma}_{\alpha}b_{\gamma\beta}+\tilde b^{n\gamma}_{\beta}b_{\gamma\alpha}),\ \nabla B^n_{\alpha\beta}\equiv 0 \tag{12}$$

и ввести в рассмотрение функции

$$v_\alpha=-(B^n_{\alpha\beta}\tilde V^\beta_n-\lambda_\alpha),\ \nabla v_\alpha=B^n_{\alpha\beta}\omega^\beta_n+v_{\alpha K}\omega^K, \tag{13}$$

$$\upsilon^\alpha_n=-B^\alpha B_n v_\beta,\ \nabla\upsilon^\alpha_n+\omega^\alpha_n=\upsilon^\alpha_{nK}\omega^K. \tag{14}$$

Поле (14) квазитензора $\{\upsilon^\alpha_n\}$ задает поле нормалей 1-го рода L-подрасслоения. В биекции (5) полю объекта $\{\upsilon^\alpha_n\}$ соответствует поле тензора $\{\upsilon_\alpha\}$

$$\upsilon_\alpha=-\Lambda^n_{\alpha\beta}\upsilon^\beta_n-\mathcal{A}_\alpha),\ \nabla\upsilon_\alpha=\upsilon_{\alpha K}\omega^K, \tag{15}$$

которое порождает поле внутренних нормалей 2-го рода L-подрасслоения. Таким образом, построена нормализация $(\upsilon^\alpha_n,\upsilon_\alpha)$ L-подрасслоения в дифференциальной окрестности 2-го порядка.

Дальнейшие построения объектов проведем, используя функции a^n_{ijk}, дифференциальные уравнения для которых получим из формул [2, (2)]:

$$\nabla a^n_{ijk}\equiv(a^n_{ij}\Lambda^n_{sk}+a^n_{is}\Lambda^n_{jk}+a^n_{sj}\Lambda^n_{ik})\omega^s_n. \tag{16}$$

Итак, учитывая (16) и соотношения $\nabla a^n_{ijk}\equiv 0$, найдем последовательно дифференциальные уравнения для следующих функций:

$$t_i=\frac{1}{m+2}a^n_{ijk}a^{jk}_n,\ \nabla t_i=a_{is}\omega^s_n+t_{iK}\omega^K, \tag{17}$$

$$A^n_{ijk}=\frac{1}{3}a^n_{(ijk)},\ \nabla A^n_{ijk}\equiv a^n_{(ij}a^n_{k)s}\omega^s_n+\frac{1}{3}r^n_{s(i}a^n_{jk)}\omega^s_{ni}, \tag{18}$$

$$\begin{cases}\tilde A_k=\dfrac{1}{m+2}\ A^n_{ijk}a^{ij}_n,\ \nabla\tilde A_k\equiv a_{ks}\omega^s_n+\dfrac{1}{3}r_{sk}\omega^s_n, & \\ B^n_{ijk}=A^n_{ijk}-a^n_{(ij}\tilde A_{k)}\ ,\ \nabla B^n_{ijk}\equiv 0, & \text{(а)}\\ B_n=a^{ij}_n a^{st}_n a^{kl}_n B^n_{isk}B^n_{jtl}\ ,\ d\ln B_n=\omega^n_n+C_K\omega^K, & \text{(б)}\\ b^n_{ijk}=a^n_{ijk}-a^n_{(ij}t_{k)},\ \nabla b^n_{ijk}\equiv(a^n_{ij}r^n_{sk}+a^n_{is}r^n_{jk}+a^n_{sj}r^n_{ik})\omega^s_n. & \end{cases} \tag{19}$$

Замечание. Симметрический тензор B^n_{ijk} (19а) аполярен тензору a^{ij}_n и является аналогом обобщенного тензора Дарбу [6] для Λ-подрасслоения. Относительный инвариант B_n (19б) в общем случае отличен от нуля (для регулярных гиперполос см.: [5]).

4. В случае Λ-подрасслоения с нулевым подтензором $(r^n_{ij} = 0)$ тензора неголономности во второй дифференциальной окрестности рассмотрим функции

$$\varepsilon_{nk} = a^{is}_n a^{jt}_n b^n_{kst} \tilde{c}^{\alpha}_{ij} \lambda_{\alpha},\ \nabla\varepsilon_{nk} \equiv 0,$$

$$\delta_{nk} = b^n_{kij} \tilde{b}^{ij}_{n\alpha} \tilde{V}^{\alpha}_n,\ \nabla\delta_{nk} + b^n_{kij} \tilde{b}^{ij}_{n\alpha} \omega^{\alpha}_n \equiv 0,$$

$$B_{ij} = a^{ls}_n a^{kt}_n B^n_{ist} B^n_{jlk},\ \nabla B_{ij} = B_{ijK} \omega^K. \tag{20}$$

Симметрический тензор $\{B_{ij}\}$ (20) в общем случае является невырожденным. Следовательно, для него можно ввести обратный тензор $\{B^{ij}\}$, компоненты которого удовлетворяют соотношениям

$$B_{ij} B^{jk} = \delta^k_i,\ B^{ik} B_{kj} = \delta^i_j$$

и уравнениям

$$\nabla B^{ij} \equiv 0.$$

По аналогии с п. 3, используя квазитензоры $\{\xi^i_n\}$ (10), $\{\hat{t}^{\alpha}_n\}$ [2, (31)], последовательно находим абсолютные и относительные тензоры 2-го порядка:

$$\hat{\lambda}_i = \frac{1}{n-m-1}(\Lambda^{\alpha}_{i\alpha} - \Lambda^n_{i\alpha} \hat{t}^{\alpha}_n),\ \nabla\hat{\lambda}_i \equiv 0, \tag{21}$$

$$\xi^i_{\alpha\beta} = \Lambda^i_{\alpha\beta} - \xi^i_n \Lambda^n_{\alpha\beta},\ \nabla\xi^i_{\alpha\beta} \equiv 0, \tag{22}$$

$$\tilde{\xi}^i_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\xi^i_{\alpha\beta} + \xi^i_{\beta\alpha}),\ \nabla\tilde{\xi}^i_{\alpha\beta} \equiv 0, \tag{23}$$

$$\ell^{\alpha\beta}_{ni} = (\Lambda^{\alpha}_{i\gamma} - \Lambda^n_{i\gamma} \hat{t}^{\alpha}_n) a^{\gamma\beta}_n,\ \nabla\ell^{\alpha\beta}_{ni} \equiv 0, \tag{24}$$

$$\tilde{\ell}^{\alpha\beta}_{ni} = \frac{1}{2}(l^{\alpha\beta}_{ni} + l^{\beta\alpha}_{ni}),\ \nabla\tilde{\ell}^{\alpha\beta}_{ni} \equiv 0, \tag{25}$$

$$\ell^{\alpha}_{i\gamma} = \tilde{\ell}^{\alpha\beta}_{ni} a^n_{\beta\gamma},\ \nabla\ell^{\alpha}_{i\gamma} \equiv 0,$$

$$\ell_{ij} = \ell^{\alpha}_{i\gamma} \ell^{\gamma}_{j\alpha},\ \nabla\ell_{ij} \equiv 0,$$

$$\ell^j_{ni} = \tilde{\ell}^{\alpha\beta}_{ni} \xi^j_{\alpha\beta},\ \nabla\ell^j_{ni} \equiv 0,$$

$$\tilde{\ell}^{nk}_i \ell^j_{nk} = \delta^j_i,\ \nabla\tilde{\ell}^{nk}_i \equiv 0,$$

$$L^n_{ij} = -\frac{1}{2}(\tilde{l}^{nk}_i l_{kj} + \tilde{l}^{nk}_j l_{ki}),\ \nabla L^n_{ij} \equiv 0. \tag{26}$$

Замечание. В охватах (21), (22), (24) вместо квазитензоров $\{\hat{t}^{\alpha}_n\}$, $\{\tilde{\xi}^i_n\}$ можно выбрать любой из квазитензоров $\{\nu^{\alpha}_n\}$, $\{\nu^i_n\}$ второго порядка [1; 3]. Отметим, что тензоры $\{\xi^i_{\alpha\beta}\}$ (22), $\{\ell^{\alpha\beta}_{ni}\}$ (24), вообще говоря, несимметрические по индексам α, β, а тензоры $\{\tilde{\xi}^i_{\alpha\beta}\}$ (23), $\{\tilde{\ell}^{\alpha\beta}_{ni}\}$ (25) — симметрические по индексам α, β; тензор $\{L^n_{ij}\}$ (26) — симметрический по *i*, *j*.

С помощью тензоров $\{L^n_{ij}\}$ (26), $\{\hat{\lambda}_i\}$ (21) и квазитензора $\{\xi^i_n\}$ (10) составим величины

$$e_i = -(L^n_{ki}\xi^k_n - \hat{\lambda}_i), \nabla e_i = L^n_{ki}\omega^k_n + e_{iK}\omega^K. \tag{27}$$

Используя функции (26), (27), находим

$$E^i_n = -L^{ij}_n e_j, \nabla E^i_n + \omega^i_n = E^i_{nK}\omega^K. \tag{28}$$

В биекции Бомпьяни — Пантази (6) квазитензору $\{E^i_n\}$ соответствует тензор $\{E_i\}$ 2-го порядка:

$$E_i = -\Lambda^n_{ij}E^j_n - \tilde{\mathcal{A}}_i), \nabla E_i = E_{iK}\omega^K. \tag{29}$$

Поле квазитензора $\{E_i\}$ (29) определяет поле внутренних нормалей 2-го рода Λ-подрасслоения.

Таким образом, имеем внутреннюю нормализацию (E^i_n, E_i) Λ-подрасслоения в дифференциальной окрестности 2-го порядка.

В результате исследований (п. 2—4) справедлива

Теорема 1. *$\mathscr{H}$ -распределение аффинного пространства A_n внутренним инвариантным образом порождает нормализации в смысле Нордена:*

1) в дифференциальной окрестности 2-го порядка нормализации (ξ^i_n, ξ_i), (E^i_n, E_i) Λ-подрасслоения и нормализацию $(\upsilon^\alpha_n, \upsilon_\alpha)$ L-подрасслоения;

2) в дифференциальной окрестности 1-го порядкаормализацию (V^α_n, V_α) L-подрасслоения.

5. Используя функции a^n_{ijk} и t_α [3], введем в рассмотрение охваты следующих функций по аналогии с (18)—(19):

$$\begin{gathered}A^n_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{3}a^n_{(\alpha\beta\gamma)}, \tilde{A}_\gamma = \frac{1}{n-m+1}A^n_{\alpha\beta\gamma}a^{\alpha\beta}_n,\\ B^n_{\alpha\beta\gamma} = A^n_{\alpha\beta\gamma} - a^n_{(\alpha\beta}\tilde{A}_{\gamma)}, \tilde{B}_n = a^{\alpha\beta}_n a^{\gamma\eta}_n a^{\delta\xi}_n B^n_{\alpha\gamma\delta}B^n_{\beta\eta\xi},\\ b^n_{\alpha\beta\gamma} = a^n_{\alpha\beta\gamma} - a^n_{(\alpha\beta}t_{\gamma)},\end{gathered} \tag{30}$$

дифференциальные уравнения которых соответственно имеют вид

$$\nabla A^n_{\alpha\beta\gamma} = a^n_{(\alpha\beta}a^n_{\gamma)\eta}\omega^\eta_n + \frac{1}{3}r^n_{\eta(\alpha}a^n_{\beta\gamma)}\omega^\eta_n + \frac{1}{3}a^n_{(\alpha\beta}\Lambda^n_{|i|\gamma)}\omega^i_n,$$

$$\nabla\tilde{A}_\gamma = a^n_{\gamma\beta}\omega^\beta_n + \frac{1}{3}r^n_{\beta\gamma}\omega^\beta_n + \frac{1}{3}\Lambda^n_{i\gamma}\omega^i_n,$$

$$\nabla B^n_{\alpha\beta\gamma} \equiv 0,$$

$$d\ln\tilde{B}_n = \omega^n_n + D_K\omega^K, \tag{31}$$

$$\nabla b^n_{\alpha\beta\gamma} = (a^n_{\alpha\beta}r^n_{\eta\gamma} + a^n_{\alpha\eta}r^n_{\beta\gamma} + a^n_{\eta\beta}r^n_{\alpha\gamma})\omega^\eta_n. \tag{32}$$

Симметрический тензор $B^n_{\alpha\beta\gamma}$ (30) аполярен тензору $a^{\alpha\beta}_n$ и является аналогом обобщенного тензора Дарбу L-подрасслоения. Можно также показать, что относительный инвариант $\hat{B}_n$ в общем случае отличен от нуля.

В случае если L-подрасслоение имеет нулевой подтензор $(r^n_{\alpha\beta}=0)$ тензора неголономности, во второй дифференциальной окрестности рассмотрим величины

$$\zeta_{n\eta}=a^{\alpha\zeta}_n a^{\beta\eta}_n b^n_{\gamma\zeta\eta}\tilde{\xi}^i_{\alpha\beta}\hat{\lambda}_i,\ \eta_{n\alpha}=b^n_{\alpha\beta\gamma}\tilde{\ell}^{\beta\gamma}_{ni}\tilde{\varepsilon}^i_n,\ B_{\alpha\beta}=a^{\eta\zeta}_n a^{\gamma\delta}_n B^n_{\alpha\eta\gamma}B^n_{\beta\zeta\delta},$$

удовлетворяющие согласно $\nabla a^{\alpha\beta}_n\equiv 0,$ (32), (23), (21), (25), (10) уравнениям

$$\nabla\zeta_{n\eta}\equiv 0,\ \nabla\eta_{n\alpha}+b^n_{\alpha\beta\gamma}\ell^{\beta\gamma}_{ni}\omega^i_n\equiv 0,\ \nabla B_{\alpha\beta}\equiv 0.$$

Симметрический тензор $\{B_{\alpha\beta}\}$ в общем случае является невырожденным, и для него можно ввести обратный тензор $\{B^{\alpha\beta}\},$ компоненты которого удовлетворяют условиям

$$B_{\alpha\beta}B^{\beta\gamma}_n=\delta^\gamma_\alpha,\ B^{\alpha\gamma}_n B^n_{\gamma\beta}=\delta^\alpha_\beta,\ \nabla B^{\alpha\beta}\equiv 0.$$

Окрестность 3-го порядка

6. Теперь приступим к построению функций, ассоциированных с Λ-подрасслоением в дифференциальной окрестности 3-го порядка линейного элемента $\mathscr{H}$-распределения. Замыкание уравнений (17), (19б) приводит, соответственно, к уравнениям

$$dt_{iK}-t_{iL}\omega^L_K-t_{sK}\omega^s_i-t_s\Lambda^n_{iK}t^s_n-a^n_{isK}\omega^s_n+a^n_{is}\Lambda^s_{\alpha K}\omega^\alpha_n\equiv 0, \tag{33}$$

$$dC_K-C_L\omega^L_K+\Lambda^n_{iK}\omega^i_n+\Lambda^n_{\alpha K}\omega^\alpha_n=C_{KL}\omega^L. \tag{34}$$

Из уравнений (33), (34) при $K=j$ получаем

$$\nabla t_{iK}=t_s\Lambda^n_{ij}\omega^s_n+a^n_{isj}\omega^s_n-a^n_{is}\Lambda^s_{\alpha j}\omega^\alpha_n+t_{ijK}\omega^K, \tag{35}$$

$$\nabla C_j+\Lambda^n_{ij}\omega^i_n=C_{jK}\omega^K_0. \tag{36}$$

С помощью функций t_i (17), $\tilde{V}^\alpha_n$ (7), υ_α (13) и функций 3-го порядка t_{ij} (35) составим величины

$$T_n=(t_{ij}-t_i t_j)a^{ij}_n,\ S_n=\frac{1}{m}T_n-\tilde{V}^\alpha_n\upsilon_\alpha,$$

удовлетворяющие согласно (35), (17), (7), (13) уравнениям

$$dT_n\equiv 2mt_i\omega^i_n+m\lambda_\alpha\omega^\alpha_n,\ dS_n\equiv 2t_i\omega^i_n+2\upsilon_\alpha\omega^\alpha_n.$$

Функции $\{C_j\}$, полученные при дифференцировании уравнений (19б), позволяют построить геометрический объект $\{\tilde{C}_n^i\}$ 3-го порядка:

$$\tilde{C}_n^i = \Lambda_n^{ij} C_j, \nabla \tilde{C}_n^i + \omega_n^i = \hat{C}_{nK}^i \omega^K, \tag{37}$$

поле (37) которого задает поле внутренних нормалей 1-го рода Λ-подрасслоения. В биекции (6) объекту $\{\tilde{C}_n^i\}$ соответствует тензор $\{\tilde{C}_i\}$ 3-го порядка:

$$\tilde{C}_i = -\Lambda_{ij}^n \tilde{C}_n^j - \tilde{\mathcal{A}}_i, \nabla \tilde{C}_i = \tilde{C}_{iK} \omega^K,$$

дифференциальные уравнения которого задают поле внутренних нормалей 2-го рода Λ-подрасслоения. Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Нормализация* $(\tilde{C}_n^i, \tilde{C}_i)$ *базисного Λ-подрасслоения внутренним образом порождена* $\mathcal{H}$ *-распределением в дифференциальной окрестности 3-го порядка.*

7. Построим ряд функций в третьей дифференциальной окрестности L-подрасслоения. Известно [3, с. 23], что функции $\{t_\alpha\}$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla t_\alpha = a_{\alpha\beta}^n \omega_n^\beta + t_{\alpha K} \omega^K. \tag{38}$$

Продолжая уравнения (38) и (31) получим

$$dt_{\alpha K} - t_{\alpha L} \omega_K^L - t_{\beta K} \omega_\alpha^\beta - t_\beta \Lambda_{\alpha K}^n \omega_n^\beta - a_{\alpha\beta K}^n \omega_n^\beta + a_{\alpha\beta}^n \Lambda_{iK}^\beta \omega_n^i \equiv 0, \tag{39}$$

$$dD_K - D_L \omega_K^L + \Lambda_{iK}^n \omega_n^i + \Lambda_{\alpha K}^n \omega_n^\alpha = D_{KL} \omega^L. \tag{40}$$

Полагая в (39), (40) $K = \beta$, имеем

$$dt_{\alpha\beta} \equiv \Lambda_{\alpha\beta}^n t_\gamma \omega_n^\gamma + a_{\alpha\beta\gamma}^n \omega_n^\gamma - a_{\alpha\gamma}^n \Lambda_{i\beta}^\gamma \omega_n^i + t_{\alpha\beta K} \omega^K, \tag{41}$$

$$dD_\beta + \Lambda_{i\beta}^n \omega_n^i + \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_n^\alpha = D_{\beta K} \omega^K.$$

Теперь вводим величины 3-го порядка

$$\hat{T}_n = (t_{\alpha\beta} - t_\alpha t_\beta) a_n^{\alpha\beta} - \Lambda_{ij}^n \hat{t}_n^i \hat{t}_n^j,$$

$$\hat{S}_n = \frac{1}{n-m-1} \hat{T}_n + \xi_n^i e_i,$$

которые в силу (38), (41), (2), [3, (29)] и $a_n^{\alpha\beta} \equiv 0$ удовлетворяют уравнениям

$$d\hat{T}_n \equiv 2(n-m-1) t_\gamma \omega_n^\gamma - (n-m-1) \varphi_i \omega_n^i,$$

$$d\hat{S}_n \equiv 2 t_\gamma \omega^\gamma - 2 e_i \omega_n^i.$$

Функции $\{D_j\}$ ((40), $K = j$) удовлетворяют уравнениям

$$\nabla D_j + \Lambda_{ij}^n \omega_n^i = D_{jK} \omega^K,$$

что позволяет ввести в рассмотрение квазитензор $\{\tilde{D}_n^i\}=\{\Lambda_n^{ji}D_j\}$:

$$\nabla\tilde{D}_n^i+\omega_n^i=D_{jK}\omega^K. \tag{42}$$

Уравнения (42) задают поле внутренних нормалей 1-рода Λ-подрасслоения. В биекции (6) объекту $\{\tilde{D}_n^i\}$ соответствует тензор $\{\tilde{D}_i\}$ 3-го порядка:

$$\tilde{D}_j=-\Lambda_{ij}^n\tilde{D}_n^j-\tilde{\mathcal{A}}_i,\ \nabla\tilde{D}_i=\tilde{D}_{iK}\omega^K. \tag{43}$$

Поле квазитензора $\{\tilde{D}_i\}$ (43) определяет поле внутренних нормалей 2-го рода Λ-подрасслоения.

Теорема 3. *Внутренняя нормализация* $(\tilde{D}_n^i,\tilde{D}_i)$ *базисного Λ-подрасслоения порождена* $\mathscr{H}$ *-распределением в дифференциальной окрестности 3-го порядка.*

8. Пусть квазитензор $\{\nu_n^i\}$ задает произвольную нормаль 1-го рода Λ-подрасслоения. Тогда функции

$$\tilde{C}_\beta=C_\beta-\Lambda_{i\beta}^n\nu_n^i,\ \tilde{D}_\beta=D_\beta-\Lambda_{i\beta}^n\nu_n^i$$

согласно уравнениям $\nabla\nu_n^i+\omega_n^i\equiv 0$, (2), (41) удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\nabla\tilde{C}_\beta=-\Lambda_{\alpha\beta}^n\omega_n^\alpha+\tilde{C}_{\beta K}\omega^K,\ \nabla\tilde{D}_\beta=-\Lambda_{\alpha\beta}^n\omega_n^\alpha+\tilde{D}_{\beta K}\omega^K, \tag{44}$$

а функции

$$C_n^\alpha=\tilde{C}_\beta\Lambda_n^{\beta\alpha},\ D_n^\alpha=\tilde{D}_\beta\Lambda_n^{\beta\alpha},$$

в силу (44) уравнениям

$$\nabla C_n^\alpha+\omega_n^\alpha=C_{nK}^\alpha\omega^K,\ \nabla D_n^\alpha+\omega_n^\alpha=D_{nK}^\alpha\omega^K.$$

В биекции (5) квазитензорам $\{C_n^\alpha\}$, $\{D_n^\alpha\}$ соответствуют тензоры 3-го порядка

$$c_\alpha=-\Lambda_{\alpha\beta}^n C_n^\beta-\mathcal{A}_\alpha,\ \nabla c_\alpha=c_{\alpha K}\omega^K,$$
$$d_\alpha=-\Lambda_{\alpha\beta}^n D_n^\beta-\mathcal{A}_\alpha,\ \nabla d_\alpha=d_{\alpha K}\omega^K.$$

В результате справедлива

Теорема 4. *Нормализации* (D_n^α,d_α), (C_n^α,c_α) *L-подрасслоения в смысле Нордена внутренним образом определены в дифференциальной окрестности 3-го порядка элемента* $\mathscr{H}$ *-распределения.*

Список литературы

1. *Попов Ю. И.* Поля геометрических объектов гиперполосного распределения аффинного пространства / Калининградский гос. ун-т. Деп. в ВИНИТИ, № 6807-В87Деп., 1986.

2. *Попов Ю. И.* Введение в теорию регулярного гиперполостного распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2013. Вып. 10. С. 49—56.

3. *Попов Ю. И.* Поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов 2-го порядка $\mathscr{H}$-распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2016. № 2. С. 18—24.

4. *Попов Ю. И.* Поля геометрических объектов $\mathscr{H}$-распределения аффинного пространства // Диф. геометрия многообр. фигур. Калининград, 2013. Вып. 44. С. 113—125.

5. *Попов Ю. И., Столяров А. В.* Специальные классы регулярных гиперполос. Калининград, 1992.

6. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Московского математического общества. 1953. Т. 2. С. 275—382.

Об авторе

Юрий Иванович Попов — канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

About the author

Dr Juriy Popov — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

УДК 514.76

Н. А. Рязанов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СРАВНЕНИЯ КОМПОНЕНТ ОБЪЕКТА КРИВИЗНЫ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ 2-ГО ПОРЯДКА

Выведены дифференциальные сравнения на компоненты объекта кривизны аффинной связности 2-го порядка. Эти сравнения показывают, что в общем случае объект кривизны 2-го порядка образует геометрический объект лишь в совокупности с объектом кривизны 1-го порядка и объектом связности 2-го порядка.

Differential comparisons for the components of the curvature object of affine connection of the second order are received. These comparisons show that, in the general case, the second-order curvature object forms a geometric object only in conjunction with the first-order curvature object and the second-order connectivity object.

Ключевые слова: структурные уравнения Лаптева, аффинная связность, объект кривизны 2-го порядка, голономное гладкое многообразие, полуголономное гладкое многообразие, неголономное гладкое многообразие.

Key words: Laptev structure equations, affine connection, curvature object of the second order, holonomic smooth manifold, semi-holonomic smooth manifold, non-holonomic smooth manifold.