Список литературы

1. *Васильев А. Н.* Maple 8. М.; СПб.; Киев. 2003
2. *Чешкова. М. А.* О листе Мебиуса // Вестник Барнаульского гос. пед. университета. 2006. Вып. 6. С. 83—86.

M. Cheshkova

TO GEOMETRIES OF KLEIN BOTTLE

In Euclidean space is studied Klein bottle. In the process of study system computer mathematics *Maple* is used.

УДК 514.76

Ю. И. Шевченко

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ОБОБЩЕННАЯ СВЯЗНОСТЬ КАРТАНА

Введено понятие главного расслоения с полуприкле иванием к базе. Прием Лумисте задания фундаментально-групповой связности в главном расслоении распространен на полуприклеенное главное расслоение. Это привело к обобщению связности Картана. Найдены дифференциальные уравнения объекта этой связности, структурные уравнения форм связности и выражения компонент объекта кривизны-кручения. Определен тензор невырожденности, обращение которого в нуль превращает обобщенную связность в фундаментально-групповую связность. Доказано, что объект кривизны-кручения обобщенной связности Картана образует геометрический объект вместе с тензором невырожденности.

Ключевые слова: фундаментально-групповая связность, приклеивание, связность Картана, объект кривизны-кручения.

§ 1. Главное расслоение с полуприклеиванием к базе

Рассмотрим главное расслоение $G_M(B_N)$ со структурными уравнениями Лаптева [1, с. 51]:

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I\,;\ (1)$$

$$D\theta^A = C_{BC}^A \theta^B \wedge \theta^C + \omega^I \wedge \theta_I^A\,, \qquad (2)$$

где индексы I, ... принимают N значений, а индексы A,... — M значений. Уравнения (1) являются структурными уравнениями N-мерного гладкого многообразия B_N — базы главного расслоения $G_M(B_N)$. Вполне интегрируемая система уравнений $\omega^I = 0$ фиксирует точку базы B_N, тогда уравнения (2) упрощаются:

$$D\overline{\theta}^A = C_{BC}^A \overline{\theta}^B \wedge \overline{\theta}^C \quad (\overline{\theta}^A = \theta^A\big|_{\omega^I=0})\,. \qquad (3)$$

Это структурные уравнения M-членной группы Ли G_M — типового слоя расслоения $G_M(B_N)$.

Постоянные C_{BC}^A удовлетворяют условию антисимметрии $C_{BC}^A = -C_{CB}^A$, которое соответствует антисимметричности внешнего произведения линейных форм. Внешнее дифференцирование уравнений (3) приводит к тождествам Якоби

$$C_{BC}^A C_{DE}^B + C_{BD}^A C_{EC}^B + C_{BE}^A C_{CD}^B = 0\,.$$

При перестановке множителей и использовании их антисимметрии получаются другие формы тождеств Якоби.

Продолжения структурных уравнений (1; 2) имеют вид [1, с. 52]:

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \omega^K \wedge \omega_{JK}^I,\ \omega_{JK}^I \wedge \omega^J \wedge \omega^K = 0, \omega_{[JK]}^I \equiv 0; \quad (4)$$

$$D\theta_I^A = \theta_I^B \wedge \Omega_B^A - \theta_J^A \wedge \omega_I^J + \omega^J \wedge \theta_{IJ}^A\,, \qquad (5)$$

$$\Omega^A_B = 2C^A_{BC}\theta^C,\ \theta^A_{IJ} \wedge \omega^I \wedge \omega^J = 0,\ \theta^A_{[IJ]} \equiv 0\ , \tag{6}$$

где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^I.

Предположим, что индексы A, I принимают пересекающиеся множества значений, тогда каждый из этих индексов можно разбить на два следующим образом:

$$A = (a,\alpha),\ I = (\alpha,i);\ a,... = \overline{1,r};\ \alpha,... = \overline{r+1,r+m}\ (r+m = M);$$
$$i,... = \overline{M+1,M+n}\ (m+n = N).$$

Системы уравнений (1) и (2) разбиваются на подсистемы

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + \omega^\alpha \wedge \omega^i_\alpha\ ; \tag{7}$$

$$D\omega^\alpha = \omega^i \wedge \omega^\alpha_i + \omega^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta\ ; \tag{8}$$

$$\begin{aligned} D\theta^\alpha = C^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\beta \wedge \theta^\gamma + 2C^\alpha_{\beta a}\theta^\beta \wedge \theta^a + C^\alpha_{ab}\theta^a \wedge \theta^b + \\ +\omega^i \wedge \theta^\alpha_i + \omega^\beta \wedge \theta^\alpha_\beta; \end{aligned} \tag{9}$$

$$D\theta^a = C^a_{bc}\theta^b \wedge \theta^c + 2C^a_{b\alpha}\theta^b \wedge \theta^\alpha + C^a_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta + \omega^I \wedge \theta^a_I\,. \tag{10}$$

Пусть выполняются тождества

$$\omega^\alpha = \theta^\alpha\ . \tag{11}$$

Они вызывают совпадение структурных уравнений (8) и (9), что возможно лишь в случае

$$C^\alpha_{ab} = 0\,, \tag{12}$$

т. е. в группе G_M есть подгруппа G_r со структурными формами $\bar{\theta}^a = \theta^a\big|_{\omega^I=0}$. Назовем (11) условиями полуприклеивания нулевого порядка. В случае (12) уравнения (9) принимают вид

$$D\theta^\alpha = \omega^i \wedge \theta^\alpha_i + \omega^\beta \wedge \theta^\alpha_\beta + \theta^\beta \wedge (C^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\gamma + 2C^\alpha_{\beta a}\theta^a)\,. \tag{13}$$

Сопоставление структурных уравнений (8) и (13) при тождествах (11) дает условия

$$\omega^\alpha_i = \theta^\alpha_i\,,\ \omega^\alpha_\beta = \theta^\alpha_\beta + C^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\gamma + 2C^\alpha_{\beta a}\theta^a\,, \tag{14}$$

которые вместе с (11) назовем условиями полуприклеивания 1-го порядка.

Определение. *Главное расслоение $G_{r+m}(B_{m+n})$ со структурными уравнениями (7—10) назовем расслоением с полуприклеиванием к базе, или полуприклеенным расслоением, и обозначим $G_{r+[m]}(B_{m+n})$, если группа Ли G_{r+m} содержит подгруппу G_r, т. е. выполняются равенства (12), и справедливы условия: нулевого порядка (11), первого порядка (11, 14) и т. д.*

Замечания

1. В обозначении полуприклеенного расслоения $G_{r+[m]}(B_{m+n})$ буква m вырезана квадратными скобками, так как каждый слой G_{r+m} имеет с базой B_{m+n} m-мерное пересечение.

2. Под структурными уравнениями главного расслоения $G_{r+[m]}(B_{m+n})$ с полуприклеиванием к базе B_{m+n} будем понимать уравнения (1, 9, 10) при условиях (11, 12, 14, ...). Если опустить уравнения (9), то останутся уравнения (1, 10) — структурные уравнения главного подрасслоения $G_r(B_{m+n})$, что позволяет называть $G_{r+[m]}(B_{m+n})$ обобщенным главным расслоением [2].

3. Если в системе уравнений (1, 9, 10) при условиях (11, 12, 14,...) опустить уравнения (8), то останутся уравнения (7, 9, 10) — подробно записанные структурные уравнения многообразия элементов Лаптева [3, с. 317]. Особый случай многообразия Лаптева — однородное расслоение [4, с. 441], точнее главное расслоение, типовым слоем которого является группа G_{r+m} с заданной подгруппой G_r.

4. Полуприклеенное расслоение $G_{r+[m]}(B_{m+n})$ при $r=0$ есть многообразие B_{m+n}, при $m=0$ — главное расслоение $G_r(B_n)$ (что также оправдывает для $G_{r+[m]}(B_{m+n})$ название обобщенного главного расслоения), при $n=0$ — главное расслоение $G_{r+[m]}(B_m)$ с приклеиванием к базе [1, с. 110; 5, 6].

5. Главные расслоения с полуприклеиваниями возникают в дифференциальной геометрии многообразий пар инцидентных линейных фигур, например семейств центрированных плоскостей [7—10].

§ 2. Связность в полуприклеенном главном расслоении

Применим прием Лумисте [11] задания фундаментально-групповых связностей в главных расслоениях к расслоению с полуприклеиванием. Преобразуем базисно-слоевые формы θ^α и слоевые формы θ^a с помощью линейных комбинаций базисных форм ω^I:

$$\widetilde{\theta}^\alpha = \theta^\alpha - \Gamma_I^\alpha \omega^I, \ \widetilde{\theta}^a = \theta^a - \Gamma_I^a \omega^I. \tag{15}$$

Дифференцируем эти формы внешним образом:

$$D\widetilde{\theta}^\alpha = 2C_{\beta a}^\alpha \theta^\beta \wedge \theta^a + C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^I \wedge (d\Gamma_I^\alpha - \Gamma_J^\alpha \omega_I^J + \theta_I^\alpha),$$

$$\begin{aligned} D\widetilde{\theta}^a = C_{bc}^a \theta^b \wedge \theta^c + 2C_{b\alpha}^a \theta^b \wedge \theta^\alpha + C_{\alpha\beta}^a \omega^\alpha \wedge \omega^\beta + \\ + \omega^I \wedge (d\Gamma_I^a - \Gamma_J^a \omega_I^J + \theta_I^a). \end{aligned} \tag{16}$$

Внесем преобразованные формы (15) в слагаемые, содержащие слоевые формы θ^a, затем осуществим частичный возврат к исходным формам:

$$2C_{\beta a}^\alpha \theta^\beta \wedge \theta^a = 2C_{\beta a}^\alpha (\tilde{\theta}^\beta \wedge \tilde{\theta}^a + \Gamma_I^\beta \omega^I \wedge \theta^a +$$

$$+ \theta^\beta \wedge \Gamma_J^a \omega^J - \Gamma_I^\beta \omega^I \wedge \Gamma_J^a \omega^J),$$

$$C_{bc}^a \theta^b \wedge \theta^c + 2C_{b\alpha}^a \theta^b \wedge \theta^\alpha =$$

$$= C_{bc}^a (\tilde{\theta}^b \wedge \tilde{\theta}^c + \Gamma_I^b \omega^I \wedge \theta^c + \theta^b \wedge \Gamma_J^c \omega^J - \Gamma_I^b \omega^I \wedge \Gamma_J^c \omega^J) +$$

$$+ 2C_{b\alpha}^a (\tilde{\theta}^b \wedge \tilde{\theta}^\alpha + \Gamma_I^b \omega^I \wedge \theta^\alpha + \theta^b \wedge \Gamma_J^\alpha \omega^J - \Gamma_I^b \omega^I \wedge \Gamma_J^\alpha \omega^J).$$

Подставим эти выражения в формулы (16):

$$\begin{aligned} & D\widetilde{\theta}^\alpha = 2C_{\beta a}^\alpha \widetilde{\theta}^\beta \wedge \widetilde{\theta}^a + \omega^I \wedge (\Delta\Gamma_I^\alpha + \theta_I^\alpha) + \\ & + (C_{\beta\gamma}^\alpha \delta_I^\beta \delta_J^\gamma + 2C_{\beta a}^\alpha N_I^\beta \Gamma_J^a) \omega^I \wedge \omega^J, \\ & D\widetilde{\theta}^a = C_{bc}^a \widetilde{\theta}^b \wedge \widetilde{\theta}^c + 2C_{b\alpha}^a \widetilde{\theta}^b \wedge \widetilde{\theta}^\alpha + \omega^I \wedge (\Delta\Gamma_I^a + \Gamma_I^\alpha \vartheta_\alpha^a + \\ & + \theta_I^a) + (C_{\alpha\beta}^a \delta_I^\alpha \delta_J^\beta - C_{bc}^a \Gamma_I^b \Gamma_J^c + 2C_{b\alpha}^a \Gamma_I^b N_J^\alpha) \omega^I \wedge \omega^J, \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$N_I^\alpha = \delta_I^\alpha - \Gamma_I^\alpha\,, \tag{18}$$

а тензорный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Gamma_I^\alpha = d\Gamma_I^\alpha - \Gamma_J^\alpha \omega_I^J + \Gamma_I^\beta \vartheta_\beta^\alpha\,,\quad \Delta\Gamma_I^a = d\Gamma_I^a - \Gamma_J^a \omega_I^J + \Gamma_I^b \vartheta_b^a\,;$$

$$\vartheta_\beta^\alpha = 2C_{\beta a}^\alpha \theta^a\,,\ \vartheta_b^a = 2C_{bc}^a \theta^c\,,\ \vartheta_\alpha^a = 2C_{\alpha b}^a \theta^b. \tag{19}$$

Распространяя теорему Картана — Лаптева [1, с. 63, 82] на полуприклеенное главное расслоение, зададим поле объекта обобщенной связности $\Gamma = \{\Gamma_I^\alpha, \Gamma_I^a\}$ на базе B_{m+n}:

$$\Delta\Gamma_I^\alpha + \theta_I^\alpha = \Gamma_{IJ}^\alpha \omega^J\,,\ \Delta\Gamma_I^a + \Gamma_I^\alpha \vartheta_\alpha^a + \theta_I^a = \Gamma_{IJ}^a \omega^J\,. \tag{20}$$

Тогда уравнения (17) примут вид

$$\begin{aligned} D\tilde\theta^\alpha &= 2C_{\beta a}^\alpha \tilde\theta^\beta \wedge \tilde\theta^a + R_{IJ}^\alpha \omega^I \wedge \omega^J\,,\\ D\tilde\theta^a &= C_{bc}^a \tilde\theta^b \wedge \tilde\theta^c + 2C_{b\alpha}^a \tilde\theta^b \wedge \tilde\theta^\alpha + R_{IJ}^a \omega^I \wedge \omega^J\,, \end{aligned} \tag{21}$$

где компоненты объекта кривизны-кручения $R = \{R_{IJ}^\alpha, R_{IJ}^a\}$ выражаются по формулам

$$\begin{aligned} R_{IJ}^\alpha &= \Gamma_{[IJ]}^\alpha + C_{\beta\gamma}^\alpha \delta_I^\beta \delta_J^\gamma + 2C_{\beta a}^\alpha N_{[I}^\beta \Gamma_{J]}^a\,,\\ R_{IJ}^a &= \Gamma_{[IJ]}^a + C_{\alpha\beta}^a \delta_I^\alpha \delta_J^\beta - C_{bc}^a \Gamma_I^b \Gamma_J^c + 2C_{b\alpha}^a \Gamma_{[I}^b N_{J]}^\alpha. \end{aligned} \tag{22}$$

Теорема 1. *Обобщенная связность в главном расслоении с полуприклеиванием $G_{r+[m]}(B_{m+n})$ задается полем объекта Г, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (20). Объект обобщенной связности Г определяет формы связности (15), удовлетворяющие структурным уравнениям (21), в которые входят компоненты объекта кривизны-кручения R, выражающиеся по формулам (22).*

Замечания

6. В главных полуприклеенных расслоениях аффинных и проективных реперов теорема Картана — Лаптева использовалась для задания обобщенных аффинных и проективных связностей [7—10, 12—16].

7. Уравнения (1, 21) обобщают структурные уравнения для форм связности Картана [6], поэтому рассматриваемую связность можно называть обобщенной связностью Картана.

§ 3. Продолжение объекта связности

Предварительно найдем структурные уравнения для форм $\vartheta^\alpha_\beta, \vartheta^a_b, \vartheta^a_\alpha, \theta^\alpha_I, \theta^a_I$, входящих в дифференциальные уравнения (20) компонент объекта связности Γ.

Дифференцируем формы ϑ^α_β (19_1)

$$D\vartheta^\alpha_\beta = 2C^\alpha_{\beta a}C^a_{bc}\theta^b \wedge \theta^c + \omega^I \wedge \vartheta^\alpha_{\beta I}, \tag{23}$$

$$\vartheta^\alpha_{\beta I} = 2C^\alpha_{\beta a}\Theta^a_I, \ \Theta^a_I = \theta^a_I + \delta^\gamma_I(\vartheta^a_\gamma + C^a_{\gamma\delta}\theta^\delta). \tag{24}$$

Преобразуем внешнее произведение

$$\begin{aligned}\vartheta^\gamma_\beta \wedge \vartheta^\alpha_\gamma &= 4C^\gamma_{\beta a}C^\alpha_{\gamma b}\theta^a \wedge \theta^b = 2C^\gamma_{\beta a}C^\alpha_{\gamma b}\theta^a \wedge \theta^b + \\ &+ 2C^\gamma_{\beta b}C^\alpha_{\gamma a}\theta^b \wedge \theta^a = -2(C^\gamma_{\beta a}C^\alpha_{b\gamma} + C^\gamma_{b\beta}C^\alpha_{a\gamma})\theta^a \wedge \theta^b.\end{aligned} \tag{25}$$

Запишем часть тождеств Якоби в виде

$$C^C_{ab}C^\alpha_{\beta C} + C^C_{b\beta}C^\alpha_{aC} + C^C_{\beta a}C^\alpha_{bC} = 0.$$

Используя равенства (12), получим

$$C^c_{ab}C^\alpha_{\beta c} + C^\gamma_{b\beta}C^\alpha_{a\gamma} + C^\gamma_{\beta a}C^\alpha_{b\gamma} = 0.$$

Учтем эти тождества в выражении (25):

$$\vartheta^\gamma_\beta \wedge \vartheta^\alpha_\gamma = 2C^c_{ab}C^\alpha_{\beta c}\theta^a \wedge \theta^b.$$

Замена индексов $a \to b \to c \to a$ дает первое слагаемое в формуле (23), поэтому

$$D\vartheta^\alpha_\beta = \vartheta^\gamma_\beta \wedge \vartheta^\alpha_\gamma + \omega^I \wedge \vartheta^\alpha_{\beta I}. \tag{26}$$

Аналогично получим

$$D\vartheta^a_b = \vartheta^c_b \wedge \vartheta^a_c + \omega^I \wedge \vartheta^a_{bI}, \ \vartheta^a_{bI} = 2C^a_{bc}\Theta^c_I. \tag{27}$$

Дифференцируем формы ϑ^a_α (19_3)

$$D\vartheta^a_\alpha = 2C^a_{\alpha b}C^b_{cd}\theta^c \wedge \theta^d + \omega^I \wedge \vartheta^a_{\alpha I},\ \vartheta^a_{\alpha I} = 2C^a_{\alpha b}\Theta^b_I. \qquad (28)$$

Преобразуем сумму внешних произведений

$$\vartheta^\beta_\alpha \wedge \vartheta^a_\beta + \vartheta^b_\alpha \wedge \vartheta^a_b = 4(C^\beta_{\alpha b}C^a_{\beta c} + C^d_{\alpha b}C^a_{dc})\theta^b \wedge \theta^c =$$

$$= 2(C^\beta_{\alpha b}C^a_{\beta c} + C^d_{\alpha b}C^a_{dc})\theta^b \wedge \theta^c + 2(C^\beta_{\alpha c}C^a_{\beta b} + C^d_{\alpha c}C^a_{db})\theta^c \wedge \theta^b =$$

$$= 2(C^\beta_{\alpha b}C^a_{\beta c} + C^d_{\alpha b}C^a_{dc} + C^\beta_{c\alpha}C^a_{\beta b} + C^d_{c\alpha}C^a_{db})\theta^b \wedge \theta^c. \qquad (29)$$

Воспользуемся следующей частью тождеств Якоби:

$$C^D_{\alpha b}C^a_{Dc} + C^D_{bc}C^a_{D\alpha} + C^D_{c\alpha}C^a_{Db} = 0.$$

Запишем их подробнее и учтем равенства (12):

$$C^\beta_{\alpha b}C^a_{\beta c} + C^d_{\alpha b}C^a_{dc} + C^d_{bc}C^a_{d\alpha} + C^\beta_{c\alpha}C^a_{\beta b} + C^d_{c\alpha}C^a_{db} = 0.$$

Выразим крайние слагаемые через среднее, подставим в выражение (29), преобразуем и получим первое слагаемое формулы (28_1). Значит,

$$D\vartheta^a_\alpha = \vartheta^\beta_\alpha \wedge \vartheta^a_\beta + \vartheta^b_\alpha \wedge \vartheta^a_b + \omega^I \wedge \vartheta^a_{\alpha I}. \qquad (30)$$

Уравнения (5) в более подробной записи с учетом равенств (12) принимают вид:

$$\begin{aligned} D\theta^\alpha_I &= \theta^\beta_I \wedge \vartheta^\alpha_\beta - \theta^\alpha_J \wedge \omega^J_I + \omega^J \wedge \hat\theta^\alpha_{IJ}, \\ D\theta^a_I &= \theta^\alpha_I \wedge \vartheta^a_\alpha + \theta^b_I \wedge \vartheta^a_b - \theta^a_J \wedge \omega^J_I + \omega^J \wedge \hat\theta^a_{IJ}; \end{aligned} \qquad (31)$$

$$\begin{aligned} \hat\theta^\alpha_{IJ} &= \theta^\alpha_{IJ} + 2\delta^\beta_J(C^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\gamma_I - C^\alpha_{a\beta}\theta^a_I), \\ \hat\theta^a_{IJ} &= \theta^a_{IJ} + 2\delta^\alpha_J(C^a_{\alpha\beta}\theta^\beta_I - C^a_{b\alpha}\theta^b_I). \end{aligned} \qquad (32)$$

С помощью структурных уравнений (4_1, 26, 27, 30, 31) продолжим дифференциальные уравнения (20). Дифференцируем их внешним образом, выносим базисные формы, разрешаем по лемме Картана и записываем результат в виде сравнений

$$\Delta\Gamma^\alpha_{IJ} - \Gamma^\alpha_K\omega^K_{IJ} + \Gamma^\beta_I\vartheta^\alpha_{\beta J} + \hat\theta^\alpha_{IJ} \equiv 0,$$

$$\Delta\Gamma^a_{IJ} - \Gamma^a_K\omega^K_{IJ} + \Gamma^b_I\vartheta^a_{bJ} + \Gamma^\alpha_{IJ}\vartheta^a_\alpha + \Gamma^\alpha_I\vartheta^a_{\alpha J} + \hat\theta^a_{IJ} \equiv 0.$$

Альтернируем эти сравнения по индексам I, J с учетом сравнений (4_3, 6_3) и обозначений (24, 27_2, 28_2, 32)

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{[IJ]} + 2C^{\alpha}_{\beta a}\Gamma^{\beta}_{[I}(\theta^{a}_{J]} + \delta^{\gamma}_{J]}\vartheta^{a}_{\gamma}) + 2\delta^{\beta}_{[J}(C^{\alpha}_{\beta\gamma}\theta^{\gamma}_{I]} - C^{\alpha}_{a\beta}\theta^{a}_{I]}) \equiv 0,$$

$$\begin{gathered}\Delta\Gamma^{a}_{[IJ]} + 2C^{a}_{bc}\Gamma^{b}_{[I}(\theta^{c}_{J]} + \delta^{\alpha}_{J]}\vartheta^{c}_{\alpha}) + \Gamma^{\alpha}_{[IJ]}\vartheta^{a}_{\alpha} + \\ + 2C^{a}_{\alpha b}\Gamma^{\alpha}_{[I}(\theta^{b}_{J]} + \delta^{\alpha}_{J]}\vartheta^{b}_{\alpha}) + 2\delta^{\alpha}_{[J}(C^{a}_{\alpha\beta}\theta^{\beta}_{I]} - C^{a}_{b\alpha}\theta^{b}_{I]}) \equiv 0.\end{gathered} \qquad (33)$$

§ 4. Структурные постоянные, обобщенный символ Кронекера и тензор невырожденности

Лемма 1. *Структурные уравнения* C^{A}_{BC} *образуют абсолютный тензор:*

$$\Delta C^{A}_{BC} = 0\,. \qquad (34)$$

Действительно, запишем уравнения (34) подробнее

$$dC^{A}_{BC} + C^{D}_{BC}\Omega^{A}_{D} - C^{A}_{DC}\Omega^{D}_{B} - C^{A}_{BD}\Omega^{D}_{C} = 0\,. \qquad (35)$$

Поскольку $C^{A}_{BC} = const$, имеем $dC^{A}_{BC} = 0$. Подставим также выражения (6_1) форм Ω^{A}_{B}

$$2(C^{D}_{BC}C^{A}_{DE} - C^{A}_{DC}C^{D}_{BE} - C^{A}_{BD}C^{D}_{CE})\theta^{E} = 0\,,$$

что справедливо в силу тождеств Якоби.

Формы $\vartheta^{\alpha}_{\beta}, \vartheta^{a}_{b}, \vartheta^{a}_{\alpha}$ (19) дополним нулевыми формами $\vartheta^{\alpha}_{a} = 2C^{\alpha}_{ab}\theta^{b} = 0$, тогда $\Omega^{A}_{B} = 2C^{A}_{B\alpha}\theta^{\alpha} + \vartheta^{A}_{B}$. Подставим эти выражения в уравнения (35):

$$\begin{gathered}dC^{A}_{BC} + C^{D}_{BC}\vartheta^{A}_{D} - C^{A}_{DC}\vartheta^{D}_{B} - C^{A}_{BD}\vartheta^{D}_{C} = \\ = 2(C^{A}_{BD}C^{D}_{C\alpha} + C^{A}_{DC}C^{D}_{B\alpha} - C^{D}_{BC}C^{A}_{D\alpha})\theta^{\alpha}.\end{gathered}$$

В силу части тождеств Якоби получаем

$$dC^{A}_{BC} + C^{D}_{BC}\vartheta^{A}_{D} - C^{A}_{DC}\vartheta^{D}_{B} - C^{A}_{BD}\vartheta^{D}_{C} = 0. \qquad (36)$$

Запишем часть уравнений (36) для индексов *α, β, γ* в подробном виде, используем равенства (12) и тензорный оператор Δ:

$$\Delta C^{\alpha}_{\beta\gamma} - C^{\alpha}_{a\gamma}\vartheta^{a}_{\beta} - C^{\alpha}_{\beta a}\vartheta^{a}_{\gamma} = 0. \qquad (37)$$

Аналогично для индексов *α, β, a; a, b, c; a, b, α; a, α, β* уравнения (36) дают

$$\Delta C^{\alpha}_{\beta a} = 0,\ \Delta C^{a}_{bc} = 0,\ \Delta C^{a}_{b\alpha} - C^{a}_{bc}\vartheta^{c}_{\alpha} + C^{\beta}_{b\alpha}\vartheta^{a}_{\beta} = 0,$$
$$\Delta C^{a}_{\alpha\beta} - C^{a}_{\alpha b}\vartheta^{b}_{\beta} - C^{a}_{b\beta}\vartheta^{b}_{\alpha} + C^{\gamma}_{\alpha\beta}\vartheta^{a}_{\gamma} = 0. \qquad (38)$$

Лемма 2. *Тензор* C^{A}_{BC} *содержит четыре абсолютных подтензора: два простейших [17]* $C^{\alpha}_{\beta a}, C^{a}_{bc}$ *и два простых [17]* $\{C^{\alpha}_{\beta\gamma}, C^{\alpha}_{\beta a}\}$, $\{C^{a}_{b\alpha}, C^{\alpha}_{\beta a}, C^{a}_{bc}\}$.

Лемма 3. *Символ Кронекера* δ^{J}_{I} *является абсолютным тензором:*

$$\Delta\delta^{J}_{I} = 0.$$

В самом деле, раскроем действие оператора Δ:

$$d\delta^{J}_{I} - \delta^{J}_{K}\omega^{K}_{I} + \delta^{K}_{I}\omega^{J}_{K} = 0. \qquad (39)$$

Учтем, что $\delta^{J}_{I} = const$, и осуществим свертки:

$$0 - \omega^{J}_{I} + \omega^{J}_{I} = 0.$$

Возьмем часть уравнений (39) при $J=\alpha$

$$d\delta^{\alpha}_{I} - \delta^{\alpha}_{K}\omega^{K}_{I} + \delta^{\beta}_{I}\omega^{\alpha}_{\beta} + \delta^{i}_{I}\omega^{\alpha}_{i} = 0.$$

Воспользуемся условиями полуприклеивания (14) и обозначением (19_1)

$$d\delta^{\alpha}_{I} - \delta^{\alpha}_{K}\omega^{K}_{I} + \delta^{\beta}_{I}(\theta^{\alpha}_{\beta} + C^{\alpha}_{\beta\gamma}\theta^{\gamma} + \vartheta^{\alpha}_{\beta}) + \delta^{i}_{I}\theta^{\alpha}_{i} = 0.$$

Раскроем скобки и используем тензорный оператор Δ:

$$\Delta\delta^{\alpha}_{I} + \delta^{\beta}_{I}\theta^{\alpha}_{\beta} + \delta^{\beta}_{I}C^{\alpha}_{\beta\gamma}\theta^{\gamma} + \delta^{i}_{I}\theta^{\alpha}_{i} = 0.$$

Объедим два слагаемых в одно и перенесем слагаемое с формами θ^γ вправо:

$$\Delta\delta_I^\alpha + \delta_I^J\theta_J^\alpha = -\delta_I^\beta C_{\beta\gamma}^\alpha\theta^\gamma .$$

Осуществим свертку с символом Кронекера и используем условие полуприклеивания (11):

$$\Delta\delta_I^\alpha + \theta_I^\alpha = \delta_{IJ}^\alpha\omega^J ,\ \delta_{IJ}^\alpha = -C_{\beta\gamma}^\alpha\delta_I^\beta\delta_J^\gamma . \qquad (40)$$

Лемма 4. *Компоненты обобщенного символа Кронекера* δ_I^α *удовлетворяют дифференциальным уравнениям* (40_1), *т. е.* δ_I^α *является квазитензором, присоединенным к главному полуприклеенному расслоению* $G_{r+[m]}(B_{m+n})$, *причем его поле на базе* B_{m+n} *характеризуется постоянными пфаффовыми производными* δ_{IJ}^α (40_2), *которые антисимметричны по нижним индексам.*

В силу дифференциальных уравнений (20_1, 40_1) величи́ны N_I^α (18) удовлетворяют сравнениям

$$\Delta N_I^\alpha \equiv 0 , \qquad (41)$$

т. е. образуют тензор, который назовем *тензором невырожденности обобщенной связности Картана*. Если тензор невырожденности обращается в нуль:

$$N_I^\alpha = 0 \Leftrightarrow \Gamma_I^\alpha = \delta_I^\alpha \Leftrightarrow \widetilde{\theta}^\alpha = \theta^\alpha - \delta_I^\alpha\omega^I = \theta^\alpha - \omega^\alpha = 0 ,$$

то исчезают формы $\widetilde{\theta}^\alpha$, а объект обобщенной связности $\Gamma = \{\delta_I^\alpha, \Gamma_I^a\}$ сводится к объекту фундаментально-групповой связности Γ_I^a в главном расслоении $G_r(B_{m+n})$.

§ 5. Объект кривизны-кручения обобщенной связности

С помощью дифференциальных соотношений (20, 33, 37, 38, 40_1, 41) найдем сравнения для компонент (22) объекта кривизны-кручения R:

$$\Delta R^{\alpha}_{IJ} + 2C^{\alpha}_{\beta a}\Gamma^{\beta}_{[I}(\theta^{a}_{J]} + \delta^{\gamma}_{J]}\vartheta^{a}_{\gamma}) + 2\delta^{\beta}_{[J}C^{\alpha}_{\beta a}\theta^{a}_{I]} -$$
$$-(C^{\alpha}_{a\gamma}\vartheta^{a}_{\beta} + C^{\alpha}_{\beta a}\vartheta^{a}_{\gamma})\delta^{\beta}_{I}\delta^{\gamma}_{J} + 2C^{\alpha}_{\beta a}N^{\beta}_{[I}(\Gamma^{\gamma}_{J]}\vartheta^{a}_{\gamma} + \theta^{a}_{J]}) \equiv 0,$$
$$\Delta R^{a}_{IJ} + 2C^{a}_{bc}\Gamma^{b}_{[I}\delta^{\alpha}_{J]}\vartheta^{c}_{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{[IJ]}\vartheta^{a}_{\alpha} + 2C^{a}_{\alpha b}\Gamma^{\alpha}_{[I}(\theta^{b}_{J]} + \delta^{\alpha}_{J]}\vartheta^{b}_{\alpha}) -$$
$$-2\delta^{\alpha}_{[J}C^{a}_{b\alpha}\theta^{b}_{I]} + (C^{\gamma}_{\alpha\beta}\vartheta^{a}_{\gamma} - C^{a}_{\alpha b}\vartheta^{b}_{\beta} - C^{a}_{b\beta}\vartheta^{b}_{\alpha})\delta^{\alpha}_{I}\delta^{\beta}_{J} - C^{a}_{bc}\Gamma^{\alpha}_{I}\Gamma^{c}_{J}\vartheta^{b}_{\alpha} -$$
$$-C^{a}_{bc}\Gamma^{b}_{I}\Gamma^{\alpha}_{J}\vartheta^{c}_{\alpha} + 2(C^{\beta}_{b\alpha}\vartheta^{a}_{\beta} - C^{a}_{bc}\vartheta^{c}_{\alpha})\Gamma^{b}_{[I}N^{\alpha}_{J]} +$$
$$+2C^{a}_{b\alpha}(\Gamma^{\beta}_{[I}\vartheta^{b}_{\beta} + \theta^{b}_{[I})N^{\alpha}_{J]} \equiv 0.$$

Подставим выражение (18) тензора невырожденности N^{α}_{I}:

$$\Delta R^{\alpha}_{IJ} + 2C^{\alpha}_{\beta a}(\Gamma^{\beta}_{[I}\delta^{\gamma}_{J]} + \delta^{\beta}_{[I}\Gamma^{\gamma}_{J]} - \Gamma^{\beta}_{[I}\Gamma^{\gamma}_{J]} - \delta^{\beta}_{[I}\delta^{\gamma}_{J]})\vartheta^{a}_{\gamma} \equiv 0,$$
$$\Delta R^{a}_{IJ} + [\Gamma^{\alpha}_{[IJ]} + C^{\alpha}_{\beta\gamma}\delta^{\beta}_{I}\delta^{\gamma}_{J} + 2C^{\alpha}_{b\beta}\Gamma^{b}_{[I}(\delta^{\beta}_{J]} - \Gamma^{\beta}_{J]})]\vartheta^{a}_{\alpha} +$$
$$+2C^{a}_{b\alpha}(\delta^{\alpha}_{[I}\delta^{\beta}_{J]} - \Gamma^{\alpha}_{[I}\delta^{\beta}_{J]} - \delta^{\alpha}_{[I}\Gamma^{\beta}_{J]} + \Gamma^{\alpha}_{[I}\Gamma^{\beta}_{J]})\vartheta^{b}_{\beta} \equiv 0.$$

Воспользуемся формулами (22_1, 18)

$$\Delta R^{\alpha}_{IJ} - 2C^{\alpha}_{\beta a}N^{\beta}_{[I}N^{\gamma}_{J]}\vartheta^{a}_{\gamma} \equiv 0,$$
$$\Delta R^{a}_{IJ} + R^{\alpha}_{IJ}\vartheta^{a}_{\alpha} + 2C^{a}_{b\alpha}N^{\alpha}_{[I}N^{\beta}_{J]}\vartheta^{b}_{\beta} \equiv 0.$$

Теорема 2. *Объект кривизны-кручения R и объект кручения R^{α}_{IJ} обобщенной связности Картана образуют геометрические объекты в совокупности с тензором невырожденности N^{α}_{I}.*

Вывод. В общем случае ($C^{\alpha}_{\beta a} \neq 0, C^{a}_{b\alpha} \neq 0$) нужно говорить о расширенном объекте кривизны-кручения $\{R, N^{\alpha}_{I}\}$ и расширенном объекте кручения $\{R^{\alpha}_{IJ}, N^{\alpha}_{I}\}$.

Список литературы

1. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

2. *Шевченко Ю.И.* Общая фундаментально-групповая связность с точки зрения расслоений // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 21. Калининград, 1990. С. 100—105.

3. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

4. *Лумисте Ю.Г.* Связность в однородных расслоениях // Матем. сб. 1966. Т. 69. №3. С. 434—469.

5. *Лумисте Ю.Г.* Связность на многообразии // Матем. энциклопедия. М., 1984. Т. 4. С. 1092—1094.

6. *Евтушик Л.Е.* Связности Картана и геометрия пространств Кавагути, полученные методом подвижного репера // Современная математика и ее приложения / ВИНИТИ. М., 2002. Т. 30. С. 171—204.

7. *Белова О.О.* Плоскостная обобщенная аффинная связность, ассоциированная с пространством центрированных плоскостей // Геом. многообр. и ее приложения: матер. науч. конф. с междунар. участием. Улан-Удэ, 2010. С. 8—13.

8. *Кулешов А.В.* Обобщенные связности на комплексе центрированных плоскостей в проективном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 41. Калининград, 2010. С. 75—85.

9. *Шевченко Ю.И.* Проективная связность Лаптева—Остиану, ассоциированная с распределением плоскостей // Там же. С. 150—165.

10. *Шевченко Ю.И.* Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве. Калининград, 2009.

11. *Шевченко Ю.И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // Диф. геом. многообр. фигур. Вып. 37. Калининград, 2006. С. 179—187.

12. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геом. семинара /ВИНИТИ. М., 1971. Т. 3. С. 49—93.

13. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии /ВИНИТИ. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.

14. *Поляков Н.Д.* Метрические связности на почти контактном многообразии / Деп. в ВИНИТИ. М., 1976. №3202—76.

15. *Ивлев Е.Т.* Структуры почти произведения на базах проективных расслоений / Деп. в ВИНИТИ. Томск, 1986. №2248-В.

16. *Соколовская С.И.* Реализация связностей с различными размерностями базы и слоя на оснащенных подмногообразиях проективного пространства: дис. … канд. физ.-мат. наук. М., 2002.

17. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

Yu. Shevchenko

GENERALIZED CARTAN CONNECTION

The notion of a principal bundle with semi-solder to base is introduced. Lumiste's reception of the giving fundamental-group connection on the principal bundle is distributed at semi-solder principal bundle. It is led to a generalization of the Cartan's connection. Differential equations of this connection object, structure equations for the connection forms and expressions for the object curvature-torsion components are found. Nonsingular tensor whose vanishing makes a generalized connection in a fundamental-group connection is defined. It is proved, that the curvature-torsion object of generalized Cartan's connection forms a geometric object with nonsingular tensor.