УДК 514.75

Н. А. Елисеева
Калининградский государственный технический университет

Гиперповерхность проективного пространства, оснащенная распределениями

В проективном пространстве изучается гиперповерхность Ω_{n-1}, несущая тройку сильно взаимных подрасслоений. Приведено задание гиперповерхности Ω_{n-1} в репере первого порядка и доказана теорема существования. Дана геометрическая интерпретация голономности основных структурных подрасслоений гиперповерхности Ω_{n-1}.

Ключевые слова: гиперповерхность, распределение, голономность, взаимность подрасслоений, гиперполоса.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$I,K=\overline{1,n};\ p,q,t=\overline{1,r};\ \hat{p},\hat{q}=\{\overline{1,r};n\};\ i,j,k=\overline{r+1,m};$$
$$\hat{i},\hat{j}=\{\overline{r+1,m};n\};\ \alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1};\ \hat{\alpha},\hat{\beta}=\overline{m+1,n};\ \sigma,\tau=\overline{1,n-1};$$
$$\hat{A},\hat{B}=\{\overline{1,r};\overline{m+1,n}\};\ a,b,c=\overline{1,m};\ \hat{a}=\overline{0,m}.$$

1. Задание гиперповерхности Ω_{n-1} проективного пространства

Известно [1; 2], что трехсоставное сильно взаимное распределение (VH-распределение) в репере 1-го порядка задается уравнениями (без соответствующих замыканий)

$$\omega_p^n=\Lambda_{p\hat{q}}^n\omega_0^{\hat{q}},\ \omega_i^n=\Lambda_{i\hat{j}}^n\omega_0^{\hat{j}},\ \omega_\alpha^n=\Lambda_{\alpha\hat{\beta}}^n\omega_0^{\hat{\beta}},\ \omega_p^\alpha=\Lambda_{pK}^\alpha\omega_0^K,$$
$$\omega_\alpha^p=\Lambda_{\alpha K}^p\omega_0^K,\ \omega_i^\alpha=\Lambda_{iK}^\alpha\omega_0^K,\ \omega_\alpha^i=\Lambda_{\alpha K}^i\omega_0^K, \tag{1.1}$$
$$\omega_p^i=\Lambda_{pK}^i\omega_0^K,\ \omega_i^p=\Lambda_{iK}^p\omega_0^K.$$

Напомним, что основные структурные подрасслоения *VH*-распределения связаны соотношениями

$$\Lambda_r(A_0) \subset M_m(A_0) \subset H_{n-1}(A_0),$$
$$M_m(A_0) = [\Lambda_r(A_0), L_s(A_0)],$$
$$\Phi_{n-r-1}(A_0) = [L_s(A_0), E_{n-m-1}(A_0)],$$
$$\Psi_{n-s-1}(A_0) = [\Lambda_r(A_0), E_{n-m-1}(A_0)],$$
$$\Phi_{n-r-1}(A_0) \cap M_m(A_0) = L_s(A_0),$$
$$\Psi_{n-s-1}(A_0) \cap M_m(A_0) = \Lambda_r(A_0),$$

где $\Phi_{n-r-1}(A_0)$, $\Psi_{n-s-1}(A_0)$, $E_{n-m-1}(A_0)$ — характеристики гиперплоскости $H(A_0)$ при смещениях центра A_0 вдоль интегральных кривых Λ-, L-, M- подрасслоений.

Рассмотрим специальный класс VH-распределений, когда оснащающее *H*-подрасслоение голономно. В этом случае проективное пространство P_n расслаивается на однопараметрическое семейство гиперповерхностей V_{n-1}, огибающих элементы *H*-подрасслоения. При смещении центра A_0 вдоль одной из этих гиперповерхностей ($\omega_0^n = 0$) уравнения (без соответствующих замыканий)

$$\begin{gathered}\omega_0^n = 0,\ \omega_p^n = \Lambda_{pq}^n \omega_0^q,\ \omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j,\ \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_0^\beta, \\ \omega_p^\alpha = \Lambda_{p\sigma}^\alpha \omega_0^\sigma,\ \omega_\alpha^p = \Lambda_{\alpha\sigma}^p \omega_0^\sigma,\ \omega_i^\alpha = \Lambda_{i\sigma}^\alpha \omega_0^\sigma, \\ \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha\sigma}^i \omega_0^\sigma,\ \omega_p^i = \Lambda_{p\sigma}^i \omega_0^\sigma,\ \omega_i^p = \Lambda_{i\sigma}^p \omega_0^\sigma\end{gathered} \tag{1.2}$$

задают в репере 1-го порядка гиперповерхность, несущую тройку взаимных подрасслоений, то есть каждое из Λ-, L-, E- подрасслоений взаимно.

Уравнения (1.2) получены из (1.1) с учетом, что $\omega_0^n = 0$.

Отметим, что Λ-подрасслоение взаимно [3], если выполняются условия

$$\Lambda^n_{p\alpha} = 0, \ \Lambda^n_{pi} = 0. \tag{1.3}$$

Аналогично, каждое из *L-, E*-подрасслоений взаимно, если выполняются условия

$$\Lambda^n_{i\alpha} = 0, \ \Lambda^n_{ip} = 0; \tag{1.4}$$

$$\Lambda^n_{\alpha p} = 0, \ \Lambda^n_{\alpha i} = 0. \tag{1.5}$$

Условия (1.3) — (1.5) являются в то же время и условиями взаимности соответственно Φ-, Ψ-, M-подрасслоений.

Определение. *Если выполнены условия (1.3) — (1.5), то будем говорить, что тройка* (Λ, L, E)*-подрасслоений, заданных на гиперповерхности* V_{n-1}*, образует сильно взаимную систему подрасслоений.*

Гиперповерхность, несущую тройку сильно взаимных подрасслоений, обозначим символом Ω_{n-1}.

Замыкая уравнения (1.2), получим дифференциальные уравнения и соотношения, которым подчинены компоненты фундаментального объекта 2-го порядка Γ_2:

$$\nabla\Lambda^n_{pq} + \Lambda^n_{pq}\omega^0_0 = \Lambda^n_{pq\sigma}\omega^\sigma_0, \nabla\Lambda^n_{ij} + \Lambda^n_{ij}\omega^0_0 = \Lambda^n_{ij\sigma}\omega^\sigma_0, \tag{1.6}$$

$$\nabla\Lambda^n_{\alpha\beta} + \Lambda^n_{\alpha\beta}\omega^0_0 = \Lambda^n_{\alpha\beta\sigma}\omega^\sigma_0;$$

$$\nabla\Lambda^\alpha_{p\sigma} + \Lambda^\alpha_{p\sigma}\omega^0_0 + \Lambda^n_{pq}\delta^q_\sigma\omega^\alpha_n - \delta^\alpha_\sigma\omega^0_p = \Lambda^\alpha_{p\sigma\tau}\omega^\tau_0,$$

$$\nabla\Lambda^p_{\alpha\sigma} + \Lambda^p_{\alpha\sigma}\omega^0_0 + \Lambda^n_{\alpha\beta}\delta^\beta_\sigma\omega^p_n - \delta^p_\sigma\omega^0_\alpha = \Lambda^p_{\alpha\sigma\tau}\omega^\tau_0,$$

$$\nabla\Lambda^\alpha_{i\sigma} + \Lambda^\alpha_{i\sigma}\omega^0_0 + \Lambda^n_{ij}\delta^j_\sigma\omega^\alpha_n - \delta^\alpha_\sigma\omega^0_i = \Lambda^\alpha_{i\sigma\tau}\omega^\tau_0, \tag{1.7}$$

$$\nabla\Lambda^i_{\alpha\sigma} + \Lambda^i_{\alpha\sigma}\omega^0_0 + \Lambda^n_{\alpha\beta}\delta^\beta_\sigma\omega^i_n - \delta^i_\sigma\omega^0_\alpha = \Lambda^i_{\alpha\sigma\tau}\omega^\tau_0,$$

$$\nabla\Lambda^{i}_{p\sigma}+\Lambda^{i}_{p\sigma}\omega^{0}_{0}+\Lambda^{n}_{pq}\delta^{q}_{\sigma}\omega^{i}_{n}-\delta^{i}_{\sigma}\omega^{0}_{p}=\Lambda^{i}_{p\sigma\tau}\omega^{\tau}_{0},$$

$$\nabla\Lambda^{p}_{i\sigma}+\Lambda^{p}_{i\sigma}\omega^{0}_{0}+\Lambda^{n}_{ij}\delta^{j}_{\sigma}\omega^{p}_{n}-\delta^{p}_{\sigma}\omega^{0}_{i}=\Lambda^{p}_{i\sigma\tau}\omega^{\tau}_{0},$$

где

$$\Lambda^{n}_{[pq]}=0,\ \Lambda^{n}_{[ij]}=0,\ \Lambda^{n}_{[\alpha\beta]}=0,\ \Lambda^{n}_{p[qt]}=0,$$
$$\Lambda^{n}_{i[jk]}=0,\ \Lambda^{n}_{\alpha[\beta\gamma]}=0, \qquad (1.8)$$

а все остальные функции, стоящие в правых частях уравнений (1.6), (1.7), вообще говоря, не симметричны относительно нижних индексов.

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *Гиперповерхность* $\Omega_{n-1}\subset P_n$ *относительно репера 1-го порядка задается в дифференциальной окрестности 2-го порядка уравнениями (1.2), (1.6), (1.7) и соотношениями (1.8).*

Замечание. Согласно работе [4] функции $\{\Lambda^{n}_{pq}\}$, $\{\Lambda^{n}_{ij}\}$, $\{\Lambda^{n}_{\alpha\beta}\}$ образуют тензоры (1.6) второго порядка. Система функций $\Gamma_2=\{\Lambda^{n}_{pq};\Lambda^{n}_{ij};\Lambda^{n}_{\alpha\beta};\Lambda^{\alpha}_{p\sigma};\Lambda^{p}_{\alpha\sigma};\Lambda^{\alpha}_{i\sigma};\Lambda^{i}_{\alpha\sigma};\Lambda^{i}_{p\sigma};\Lambda^{p}_{i\sigma}\}$ образует фундаментальный объект 2-го порядка гиперповерхности Ω_{n-1}. Дальнейшие продолжения геометрического объекта Γ_2 вводят фундаментальные геометрические объекты более высоких порядков Γ_3,Γ_4 …

2. Теорема существования гиперповерхности Ω_{n-1}

Теорема 2. *Гиперповерхность* Ω_{n-1}, *заданная относительно репера 1-го порядка, существует с произволом* $2m(n-m-1)+2rs$ *функций от* $n-1$ *аргументов.*

Доказательство. Исследуем систему дифференциальных уравнений (1.6), (1.7). Чистое замыкание этой системы представим в виде

$$\Delta\Lambda^n_{pq}\wedge\omega^q_0=0,\ \Delta\Lambda^n_{ij}\wedge\omega^j_0=0,\ \Delta\Lambda^n_{\alpha\beta}\wedge\omega^\beta_0=0,$$
$$\Delta\Lambda^\alpha_{p\sigma}\wedge\omega^\sigma_0=0,\ \Delta\Lambda^p_{\alpha\sigma}\wedge\omega^\sigma_0=0,\ \Delta\Lambda^\alpha_{i\sigma}\wedge\omega^\sigma_0=0,\qquad(2.1)$$
$$\Delta\Lambda^i_{\alpha\sigma}\wedge\omega^\sigma_0=0,\ \Delta\Lambda^i_{p\sigma}\wedge\omega^\sigma_0=0,\ \Delta\Lambda^p_{i\sigma}\wedge\omega^\sigma_0=0.$$

Разобьем систему уравнений (2.1) на три подсистемы:

$$\Delta\Lambda^n_{pq}\wedge\omega^q_0=0,\ \Delta\Lambda^\alpha_{p\sigma}\wedge\omega^\sigma_0=0,\ \Delta\Lambda^p_{\alpha\sigma}\wedge\omega^\sigma_0=0;\qquad(2.2)$$
$$\Delta\Lambda^n_{ij}\wedge\omega^j_0=0,\ \Delta\Lambda^i_{p\sigma}\wedge\omega^\sigma_0=0,\ \Delta\Lambda^p_{i\sigma}\wedge\omega^\sigma_0=0;\qquad(2.3)$$
$$\Delta\Lambda^n_{\alpha\beta}\wedge\omega^\beta_0=0,\ \Delta\Lambda^\alpha_{i\sigma}\wedge\omega^\sigma_0=0,\ \Delta\Lambda^i_{\alpha\sigma}\wedge\omega^\sigma_0=0.\qquad(2.4)$$

Последовательно исследуем на инволютивность каждую из подсистем (2.2) — (2.4).

1. Учитывая, что $n-1>r$, найдем характеры системы (2.2): $s_1=r+B$, $s_2=(r-1)+B,\ldots,$ $s_r=[r-(r-1)]+B$,

$$s_{r+1}=B,\ldots,s_{n-1}=B,\ \text{где}\ B=2r(n-m-1).$$

Найдем число Картана [5]:

$$Q=s_1+2s_2+3s_3+\ldots+(n-1)s_{n-1}=\frac{r(r+1)(r+2)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}B.$$

Применяя лемму Картана, систему (2.2) приведем к виду

$$\Delta\Lambda^n_{pq}=\Lambda^n_{pqt}\omega^t_0,\ \Delta\Lambda^\alpha_{p\sigma}=\Lambda^\alpha_{p\sigma\tau}\omega^\tau_0,\ \Delta\Lambda^p_{\alpha\sigma}=\Lambda^p_{\alpha\sigma\tau}\omega^\tau_0.\qquad(2.5)$$

Так как функции Λ^n_{pqt} симметричны по нижним индексам, то число N новых функций, появившихся в левых частях уравнений (2.5), равно

$$N=\frac{r(r+1)(r+2)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}B.$$

Итак, $N = Q$, то есть система (2.2) находится в инволюции [5]. Следовательно, пара взаимных подрасслоений (Λ, E), ассоциированная с гиперповерхностью Ω_{n-1}, существует с произволом $2m(n-m-1)$ функций $n-1$ аргументов.

2. Аналогично, для системы (2.3) последовательно находим:

а) характеры (при $n-1 > r$): $s_1 = s + C$, $s_2 = (s-1) + C, \ldots,$ $s_{m-r} = [s-(s-1)] + C$, $s_{s+1} = C$, …, $s_{n-1} = C$, где $C = 2sr$;

б) числа Q и N:

$$Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \ldots + (n-1)s_{n-1} = (s+C) + 2(s-1) +$$
$$+ 2C + 3(s-2) + 3s + \ldots + s[s-(s-1)] + C + (s+1)C + \ldots$$
$$+ (n-1)C = \frac{s(s+1)(s+2)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}C, \ N = Q.$$

Таким образом, система (2.3) находится в инволюции. Значит, пара взаимных подрасслоений (Λ, L), ассоциированная с гиперповерхностью Ω_{n-1}, существует с произволом $2rs$ функций $n-1$ аргументов.

3. Наконец, система (2.4) имеет следующие характеры:

$$s_1 = n-m-1+D, \ s_2 = n-m-2+D, \ldots, \ s_{n-m-1} = 1+D,$$
$$s_{n-m} = D, \ldots, s_{n-1} = D, \text{ где } D = 2s(n-m-1);$$
$$Q = N = \frac{(n-m-1)(n-m)(n-m+1)}{6} + \frac{n(n-1)}{2}D.$$

Система уравнений (2.4) в инволюции. Таким образом, пара взаимных подрасслоений (E, L), ассоциированная с гиперповерхностью Ω_{n-1}, существует с произволом $2s(n-m-1)$ функций от $n-1$ аргументов.

Гиперповерхность Ω_{n-1}, несущая сильно взаимную систему (Λ, L, E)-подрасслоений, существует с произволом

$$2r(n-m-1)+2rs+2s(n-m-1)=2m(n-m-1)+2rs$$

функций от $n-1$ аргументов. Теорема доказана.

3. Голономность основных структурных подрасслоений гиперповерхности Ω_{n-1}

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\omega_0^i=0,\ \omega_0^\alpha=0, \tag{3.1}$$

ассоциированную с системой уравнений (1.2), (1.6), (1.7), определяющей гиперповерхность $\Omega_{n-1}\subset P_n$. Тогда уравнения (1.2) с учетом выражения (3.1) примут вид

$$\omega_0^n=0,\ \omega_0^i=0,\ \omega_0^\alpha=0,\ \omega_\alpha^n=0,\ \omega_i^n=0; \tag{3.2}$$

$$\begin{gathered}\omega_p^n=\Lambda^n_{pq}\omega_0^q,\ \omega_i^\alpha=\Lambda^\alpha_{iq}\omega_0^q,\ \omega_p^\alpha=\Lambda^\alpha_{pq}\omega_0^q,\ \omega_p^i=\Lambda^i_{pq}\omega_0^q,\\ \omega_\alpha^i=\Lambda^i_{\alpha q}\omega_0^q,\ \omega_\alpha^p=\Lambda^p_{\alpha q}\omega_0^q,\ \omega_i^p=\Lambda^p_{iq}\omega_0^q.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Система (3.2) вполне интегрируема тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\begin{gathered}\Lambda^n_{[pq]}=0,\ \Lambda^i_{[pq]}=0,\ \Lambda^\alpha_{[pq]}=0,\\ \Lambda^t_{\alpha[p}\Lambda^n_{|t|q]}=0,\ \Lambda^t_{i[p}\Lambda^n_{|t|q]}=0.\end{gathered} \tag{3.4}$$

Из условий (3.4) вытекает, что тензор $r^{\hat{u}}_{pq}=\{r^n_{pq},r^i_{pq},r^\alpha_{pq}\}$ неголономности Λ-подрасслоения [1] равен нулю, то есть

$$r^{\hat{u}}_{pq}=0. \tag{3.5}$$

При условии (3.5) Λ-подрасслоение определяет $(n-r-1)$-параметрическое семейство поверхностей V_r (плоскости Λ_r огибаются поверхностями V_r). При смещении центра A_0 вдоль фиксированной поверхности V_r получим регулярную гиперполосу $H_r \subset P_n$ с полем распадающихся характеристик [1]

$$\Phi_{n-r-1}(A_0) = [E_{n-m-1}(A_0); L_s(A_0)]\,. \tag{3.6}$$

Гиперполоса H_r задается уравнениями (3.2), (3.3), а также замыканиями уравнений (3.3) и соотношениями (3.4).

Итак, в случае голономности Λ-подрасслоения (3.5) гиперповерхность расслаивается на $(n-r-1)$-параметрическое семейство регулярных гиперполос H_r с распадающимися характеристиками Φ_{n-r-1} (3.6).

2. Аналогично, пусть система дифференциальных уравнений

$$\omega_0^\alpha = 0\,,\ \omega_0^p = 0 \tag{3.7}$$

ассоциирована с уравнениями (1.2), (1.6), (1.7). Тогда уравнения (1.2) с учетом выражения (3.5) имеют вид

$$\omega_0^n = 0\,,\ \omega_0^\alpha = 0\,,\ \omega_0^p = 0\,,\ \omega_\alpha^n = 0\,,\ \omega_p^n = 0\,; \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered} \omega_p^\alpha = \Lambda_{pj}^\alpha \omega_0^j\,,\ \omega_\alpha^p = \Lambda_{\alpha j}^p \omega_0^j\,,\ \omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega_0^j\,,\ \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha j}^i \omega_0^j\,, \\ \omega_p^i = \Lambda_{pj}^i \omega_0^j\,,\ \omega_i^p = \Lambda_{ij}^p \omega_0^j\,,\ \omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j\,. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Система (3.8) вполне интегрируема тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\begin{gathered} \Lambda_{[ij]}^n = 0\,,\ \Lambda_{[ij]}^\alpha = 0\,,\ \Lambda_{[ij]}^p = 0\,, \\ \Lambda_{\alpha[i}^k \Lambda_{|k|j]}^n = 0\,,\ \Lambda_{p[i}^k \Lambda_{|k|j]}^n = 0. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Из условий (3.10) следует, что тензор $r_{ij}^{\hat{A}} = \{r_{ij}^n, r_{ij}^\alpha, r_{ij}^p\}$ неголономности L-подрасслоения равен нулю:

$$r_{ij}^{\hat{A}} = 0\,. \tag{3.11}$$

При выполнении условий (3.11) (точнее (3.10)) L-подрасслоение определяет $(n-s-1)$-параметрическое семейство поверхностей V_s (плоскости L_s огибаются поверхностями V_s). При смещении центра A_0 вдоль фиксированной поверхности V_s получим s-мерную регулярную гиперполосу $H_s \subset P_n$ с полем распадающихся характеристик [1]:

$$\Psi_{n-s-1}(A_0) = [\Lambda(A_0); E(A_0)]\,. \tag{3.12}$$

Итак, в этом случае гиперповерхность Ω_{n-1} представляет собой $(n-s-1)$-параметрическое семейство регулярных гиперполос H_s, характеристики $\Psi_{n-s-1}(A_0)$ которых имеют структуру вида (3.12).

3. Введем в рассмотрение систему дифференциальных уравнений

$$\omega_0^p = 0\,,\ \omega_0^i = 0\,, \tag{3.13}$$

ассоциированную с уравнениями (1.2), (1.6), (1.7), определяющими гиперповерхность Ω_{n-1}.

Тогда система уравнений (1.2) с учетом выражений (3.13) примет вид

$$\omega_0^n = 0\,,\ \omega_0^p = 0\,,\ \omega_0^i = 0\,,\ \omega_p^n = 0\,,\ \omega_i^n = 0\,; \tag{3.14}$$

$$\begin{gathered}\omega_p^\alpha = \Lambda_{p\beta}^\alpha \omega_0^\beta\,,\ \omega_\alpha^p = \Lambda_{\alpha\beta}^p \omega_0^\beta\,,\ \omega_i^\alpha = \Lambda_{i\beta}^\alpha \omega_0^\beta\,,\ \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha\beta}^i \omega_0^\beta\,,\\ \omega_p^i = \Lambda_{p\beta}^i \omega_0^\beta\,,\ \omega_i^p = \Lambda_{i\beta}^p \omega_0^\beta\,,\ \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_0^\beta\,.\end{gathered} \tag{3.15}$$

Система уравнений (3.14) вполне интегрируема, если выполнены условия

$$\Lambda^n_{[\alpha\beta]}=0\,,\ \Lambda^p_{[\alpha\beta]}=0\,,\ \Lambda^i_{[\alpha\beta]}=0\,,$$
$$\Lambda^\gamma_{p[\alpha}\Lambda^n_{|\gamma|\beta]}=0\,,\ \Lambda^\gamma_{i[\alpha}\Lambda^n_{|\gamma|\beta]}=0\,. \tag{3.16}$$

Из условий (3.16) следует, что тензор $r^{\hat{a}}_{\alpha\beta}=\{r^n_{\alpha\beta}, r^i_{\alpha\beta}, r^p_{\alpha\beta}\}$ неголономности E-подрасслоения равен нулю:

$$r^{\hat{a}}_{\alpha\beta}=0\,. \tag{3.17}$$

При условии (3.17) (точнее (3.16)) E-подрасслоение определяет m-параметрическое семейство поверхностей V_{n-m-1} (плоскости E_{n-m-1} огибаются поверхностями V_{n-m-1}). При смещении центра A_0 вдоль фиксированной поверхности V_{n-m-1} соотношения (3.16) вместе с уравнениями (3.14), (3.15) и их замыканиями задают регулярную гиперполосу $H_{n-m-1}\subset P_n$ с полем распадающихся характеристик

$$M(A_0)=[\Lambda(A_0);L(A_0)]\,. \tag{3.18}$$

В этом случае ($r^{\hat{a}}_{\alpha\beta}=0$) гиперповерхность $\Omega_{n-1}\subset P_n$ представляет собой m-параметрическое семейство гиперполос H_{n-m-1}, характеристики $M(A_0)$ которых имеют структуру (3.18).

4. Рассмотрим систему уравнений

$$\omega^\alpha_0=0\,, \tag{3.19}$$

ассоциированную с системой уравнений (1.2), (1.6), (1.7) гиперповерхности Ω_{n-1}.

При условии (3.19) уравнения (1.2) примут вид

$$\omega^n_0=0\,,\ \omega^\alpha_0=0\,,\ \omega^n_\alpha=0\,, \tag{3.20}$$

$$\omega^n_p=\Lambda^n_{pq}\omega^q_0\,,\ \omega^n_i=\Lambda^n_{ij}\omega^j_0\,,\ \omega^\alpha_a=\Lambda^\alpha_{ab}\omega^b_0\,,\ \omega^a_\alpha=\Lambda^a_{\alpha b}\omega^b_0\,,$$
$$\omega^i_p=\Lambda^i_{pb}\omega^b_0\,,\ \omega^p_i=\Lambda^p_{ib}\omega^b_0\,. \tag{3.21}$$

Отметим, что уравнения (3.20) вполне интегрируемы тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\Lambda^{\alpha}_{[pq]}=0\,,\ \Lambda^{\alpha}_{[ij]}=0\,,\ \Lambda^{n}_{[pq]}=0\,,\qquad\qquad (3.22)$$
$$\Lambda^{n}_{[ij]}=0\,,\ \Lambda^{c}_{\alpha[a}\Lambda^{n}_{|c|b]}=0\,.$$

Из уравнений (3.20), (3.21) и соотношений (3.22) (здесь мы не рассматриваем замыкания уравнений (3.21)) следует, что в этом случае гиперповерхность Ω_{n-1} расслаивается на $(n-m-1)$-параметрическое семейство гиперполос H_m, базисное подрасслоение которых скомпоновано: $M(A_0)=[\Lambda(A_0);L(A_0)]$, $\forall A_0\in V_m$.

Аналогичные утверждения получим, когда рассмотрим систему уравнений: $\omega_0^i=0$ или $\omega_0^p=0$, ассоциированных с системой уравнений, задающих гиперповерхность Ω_{n-1}.

Таким образом, проективно-дифференциальную геометрию гиперповерхности $\Omega_{n-1}\subset P_n$ можно применить для исследования гиперполос специального вида, несущих двухкомпонентную систему взаимных подрасслоений, а также для изучения распределений на гиперповерхности Ω_{n-1}.

Список литературы

1. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства : монография. СПб., 1992.

2. *Попов Ю.И.* *VH*-распределения проективного пространства // Вестник Чувашского гос. пед. университета им. И.Я. Яковлева. 2006. № 5(52). С. 128—133.

3. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ АН СССР. 1975. Т. 7. С.117—151.

4. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. мат. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

5. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана. М. ; Л., 1948.

N. Eliseeva

Hypersurface of projective space equipped with distributions

A hypersurface $\Omega_{n-1} \subset P_n$ with three strongest mutual subbundles is studied. The giving the hypersurface Ω_{n-1} in the 1st order frame is adduced and the existence theorem is proved. The geometrical interpretation of a holonomicity of the main structural distributions of hypersurface Ω_{n-1} is given.

УДК 514.75

В. П. Козяйкин
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

Полные условия неподвижности точки и гиперплоскости в проективном пространстве

В проективном пространстве аналитическим аппаратом с условием проективности найдены полные уравнения стационарности точки и гиперплоскости. Показано, что при переходе к неоднородным координатам точки и неоднородному уравнению гиперплоскости появляются формы, характерные для другого аналитического аппарата проективного пространства.

Ключевые слова: проективное пространство, условия неподвижности точки, условия неподвижности гиперплоскости.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A_I\}$ $(I, ... = 0, ..., n)$, инфинитезимальные перемещения которого определяются деривационными формулами